דיון. אחת המטרות של תורת הקבוצות היא להבין את האינסוף כאובייקט מתמטי קונקרטי.

בקורס "מתמטיקה בדידה" לימדו אותנו כי לקבוצת המספרים הטבעיים ולקבוצת המספרים הרציונליים אותו גודל. עובדה זו עומדת בניגוד גמור להבנתנו האינטואיטיבית של אותן קבוצות. אז מי צודק?

מסתבר שיש כמה דרכים לאמוד גודל של קבוצה, אך הן מתלכדות במקרה של קבוצות סופיות. מדד אחד הוא מדד של כמות, ומדד אחר הוא מדד של סדר. כמובן שהיכולת לסדר שתי קבוצות באותו אופן מעיד על כך שלקבוצות אותה כמות של איברים. מאידך, הידיעה כי לשתי קבוצות יש אותה כמות של איברים איננה מעידה דבר על טיפוסי הסדר אשר כל אחת מהקבוצות הנתונות מגשימה.

כמובן שלטובת טיפול שיטתי באינסוף, רצוי להיות קפדניים ולא להסתמך על האינטואציה בלבד.

הגדרה 1.1 נאמר כי $(A,<)$ קבוצה סדורה חלקית (קס"ח) (Poset) אם:

1. $<$ אנטי־רפלקסיבי. כלומר $\neg(a<a)$ לכל $a\in A$.
2. $<$ טרנזיטיבי. כלומר אם $(a<b)$ ו־ $(b<c)$ אז $(a<c)$ לכל $a,b,c\in A$.

דוגמאות של קס"ח

1. $(\mathbb{N},<)$, כאשר $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\ldots\}$, ו־ $<$ הוא הסדר הרגיל.
2. $(\mathbb{Z},<)$, כאשר $\mathbb{Z}:=\{n,-n\mid n\in\mathbb{N}\}$, ו־ $<$ הוא הסדר הרגיל.
3. $(\mathbb{Q},<)$, כאשר $\mathbb{Q}:=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N},q\neq 0\}$ ו־ $<$ הוא הסדר הרגיל.
אמנם שלושת הקבוצות הנ"ל הן מאותו "גודל", אבל קבוצות סדורות אלו מייצגות סוגים שונים של אינסוף.
כלומר, במובן של סדר, $(\mathbb{Z},<)$ "גדול" מ־ $(\mathbb{N},<)$. באותו האופן, $(\mathbb{Q},<)$ "גדול" מ־ $(\mathbb{Z},<)$.
המטרה שלנו היא לפתח את המחלקה הנכונה של סדרים, שבה אפשר להשוות למשל סדרים בני־מניה.
4. $(\mathbb{R},<)$ קבוצת המספרים הממשיים עם הסדר הרגיל.
5. $(\mathcal{P}(X),\subsetneq)$ בהינתן קבוצה לא ריקה כלשהי X.
6. $(\mathbb{N},|)$ כאשר $n\mid m \iff$ קיים $k>1$ טבעי כך ש־ $m=n\cdot k$.

הגדרה 1.2 קס"ח $(A,<)$ היא **קבוצה סדורה קווית** אם לכל $a,b\in A$ שונים מתקיים: $(a<b)$ או $(b<a)$.

(שימו לב כי לא ייתכן קיום בו־זמנית של שתי האלטרנטיביות, שכן מטרנזיטיביות נהיה חייבים להסיק כי $b<b$ בסתירה לאנטי־רפלקסיביות.)

7. תהי $f:\mathbb{Q}\leftrightarrow\mathbb{N}$ פונקציית שקילות (חד־חד־ערכית ועל). $(bijection)$.
לכל $r\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$A_r:=\{f(q)\mid q\in\mathbb{Q}\ \&\ q<r\}$$

נשים לב כי $(\{A_r\mid r\in\mathbb{R}\},\subsetneq)$ סדורה קווית:
זוהי תת־קבוצה של $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, וכיוון ש־ $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subsetneq)$ קס"ח, גם $(\{A_r\mid r\in\mathbb{R}\},\subsetneq)$ קס"ח.
נוודא את קריטריון ה"קוויות" (לינאריות):
נניח $r\neq r'$ ממשיים. בה"כ, $r<r'$.
יהי $\bar{q}\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $r<\bar{q}<r'$, אז $\bar{q}$ מעיד כי $\{q\mid q<r\}\subsetneq\{q\mid q<r'\}$, ולכן $A_r\subsetneq A_{r'}$.

הגדרה 1.3 נניח $(A,<)$ קס"ח. קבוצה $D\subseteq A$ נקראת שולטת/קופינלית *(Dominating/Cofinal)* אם לכל $a\in A$, קיים $d\in D$ כך ש־ $a=d$ או $a<d$.

נדגים:

1. $\mathbb{N}$ קבוצה שולטת בקבוצה הסדורה $(\mathbb{R}, <)$ (מה שנקרא ארכימדיות- לכל מספר ממשי יש מספר טבעי גדול ממנו).
2. הסינגלטון $\{\mathbb{N}\}$ שולטת בקס"ח $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$.

הגדרה 1.4 איבר $a \in A$ נקרא **איבר ראשון בקס"ח** $(A, <)$ אמ"מ לכל $b \in A \backslash \{a\}$ מתקיים $a < b$.

הגדרה 1.5 איבר $a \in A$ נקרא **איבר אחרון בקס"ח** $(A, <)$ אמ"מ לכל $b \in A \backslash \{a\}$ מתקיים $b < a$.

הבחנה 1.6 אם $(A, <)$ קס"ח, ו- a איבר אחרון ב- $(A, <)$, אז $\{a\}$ שולטת ב- $(A, <)$.

תרגיל 1.7 הראו כי בקבוצה סדורה קווית ללא איבר אחרון: שולטת $\iff$ לא חסומה מלעיל.

לעומת זאת, בקס"ח כללי, השקילות אינה מתקיימת. למשל, הקבוצה $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ לא חסומה ב-$(\mathbb{N}, |)$, אך איננה שולטת בה. דוגמה נוספת: נסדר את הטבעיים עם הסדר הבא:

$$\lhd := \{(n, m) \mid (n < m \;\&\; n, m \text{ זוגיים}) \text{ או } (n < m \;\&\; n, m \text{ אי-זוגיים})\}$$

בקס"ח $(\mathbb{N}, \lhd)$ ניתן לזהות שני עותקים זרים של $(\mathbb{N}, <)$. כל עותק איננו חסום ואיננו שולט.

למה 1.8 (Rasiowa-Sikorski, 1950)

אם $(A, <)$ קס"ח לא ריקה, ו- $\langle D_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרה בת-מניה של קבוצות שולטות בקס"ח, אז קיימת $G \subseteq A$ הסדורה קווית על-ידי $<$, ומקיימת $G \cap D_n \neq \emptyset$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: נבנה סדרה $\langle g_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ באינדוקציה (רקורסיה, ליתר דיוק. יובהר בהמשך הקורס).

בסיס האינדוקציה: יהי $g_0 \in D_0$ כלשהו.

צעד האינדוקציה: נניח n טבעי, ו-$\langle g_i \mid i \leq n \rangle$ כבר הוגדרה.

כיוון ש- D_{n+1} שולטת, ניתן למצוא איבר $d \in D_{n+1}$ כך ש- $g_n = d$ או $g_n < d$.

נקח g_{n+1} להיות d איבר שכזה.

סה"כ, קיבלנו סדרה $\langle g_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$:

1. $g_n \in D_n$;
2. $g_n = g_{n+1}$ או $g_n < g_{n+1}$.

מהטרנזיטיביות של היחס $<$ נובע כי $(G, <)$ סדורה קווית, וכמובן $G \cap D_n \neq \emptyset$ לכל $n \in \mathbb{N}$. ■

תזכורת. פונקציה f היא אוסף של זוגות סדורים עם התכונה שלכל $(x, y) \in f$ ו-$(x, z) \in f$ מתקיים $y = z$.

מסמנים $\mathrm{dom}(f) := \{x \mid \exists y \; (x, y) \in f\}$, $\mathrm{Im}(f) := \{y \mid \exists x \; (x, y) \in f\}$, ו-$f \restriction X := \{(x, y) \in f \mid x \in X\}$.

סדר חלקי על פונקציות: נניח $\mathcal{F}$ משפחה של פונקציות.

עבור פונקציות $f, g \in \mathcal{F}$, נגדיר יחס $f \prec g$ אמ"מ:

1. $\mathrm{dom}(f) \subsetneq \mathrm{dom}(g)$.
2. $g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$.

שימו לב כי $(\mathcal{F}, \prec)$ קס"ח. למעשה, הסדר $\prec$ מתלכד עם $\subsetneq$.

מסקנה 1.9 (משפט קנטור, 1892) אוסף הפונקציות מ-$\mathbb{N}$ ל-$\{0, 1\}$ איננו בן-מניה.

הוכחה: נניח אחרת, ותהי $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ מניה של אוסף כל הפונקציות מ־$\mathbb{N}$ ל־$\{0,1\}$.

נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את אוסף כל הפונקציות מהצורה $f : \{0,\ldots,n\} \to \{0,1\}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$.

טענה 1: נניח $m \in \mathbb{N}$. הקבוצה $D_m := \{f \in \mathcal{F} \mid m \in \mathrm{dom}(f)\}$ היא שולטת בקס"ח $(\mathcal{F}, \prec)$.

הוכחה: תהי $f \in \mathcal{F}$ כלשהי. נבקש למצוא $f' \in D_m$ כך ש־$f = f'$ או $f \prec f'$.

יהי n כך ש־$\mathrm{dom}(f) = \{0,\ldots,n\}$. נפריד לשני מקרים:

- אם $n > m$, אז ניקח $f' = f$ וסיימנו, כי $f \in D_m$.
- אחרת, תהא $f' : \{0,\ldots,m\} \to \{0,1\}$ הפונקציה המקיימת:

$$f'(i) = \begin{cases} f(i), & i \leq n \\ 0, & n < i \leq m \end{cases}.$$

אז $f' \in D_m$ ומתקיים $f \prec f'$ כמבוקש. □

טענה 2: נניח $j \in \mathbb{N}$. הקבוצה $D^j := \{f \in \mathcal{F} \mid \exists m \in \mathrm{dom}(f)[f(m) \neq h_j(m)]\}$ היא שולטת בקס"ח $(\mathcal{F}, \subsetneq)$.

הוכחה: תהי $f \in \mathcal{F}$ כלשהי. יהי n כך ש־$\mathrm{dom}(f) = \{0,\ldots,n\}$. תהא $f' : \{0,\ldots,n+1\} \to \mathbb{N}$ הפונקציה המקיימת:

$$f'(i) = \begin{cases} f(i), & i \leq n \\ 1 - h_j(n+1), & i = n+1 \end{cases}.$$

אז $f' \in D^j$ ומתקיים $f \prec f'$ כמבוקש. □

היות ו־$\{D^i, D_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ משפחה בת־מניה של קבוצות שולטות, נסיק מלמה 1.8 קיומה של קבוצה $G \subseteq \mathcal{F}$ הסדורה קווית ע"י $\prec$ כך ש־$G \cap D^i \neq \emptyset$ וכן $G \cap D_i \neq \emptyset$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

נגדיר $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ על־ידי הכלל שלכל $m \in \mathbb{N}$:

$$g(m) = a \iff (\text{קיימת } f \in G \text{ כך ש־ } f(m) = a).$$

טענה 3: g מוגדרת היטב.

הוכחה: בהנתן $m \in \mathbb{N}$, כיוון ש־ $G \cap D_m \neq \emptyset$, נובע כי קיימת $f \in G$ כך ש־ $m \in \mathrm{dom}(f)$.

כעת, בהנתן $f' \in G$ נוספת המקיימת $m \in \mathrm{dom}(f')$, יש להראות כי $f(m) = f'(m)$.

היות ו־ G סדורה קווית, נוכל להניח בה"כ כי $f \prec f'$.

אבל אז, מהגדרת $\prec$: $m \in \mathrm{dom}(f) \subsetneq \mathrm{dom}(f')$ וכן $f(m) = f'(m)$. □

ובכן, קיבלנו פונקציה $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. מההנחה איתה התחלנו, נוכל לקבוע $j \in \mathbb{N}$ כך ש־$g = h_j$.

תהי $f \in G \cap D^j$.

יהי $m \in \mathrm{dom}(f)$ כך ש־$f(m) \neq h_j(m)$.

אז $g(m) = f(m)$ ולכן $g(m) \neq h_j(m)$ בסתירה לבחירת j. ■

תרגיל 1.10 חשבו על חיזוקים למשפט האחרון המתקבלים משימוש בקבוצות שולטות נוספות. לדוגמא, לכל רשימה $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ של פונקציות מ־$\mathbb{N}$ ל־$\{0,1\}$, קיימת פונקציה $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ כך שלכל $j \in \mathbb{N}$ הקבוצה:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \neq h_j(n)\}$$

היא אינסופית, וגם משלימתה אינסופית.

הגדרה 1.11 קס"ח $(A, <)$ נקראת **צפופה** אם לכל $a < b$ ב־ A קיים $c \in A$ כך ש־ $a < c < b$.

דוגמאות

1. $(\mathbb{Q},<)$ קבוצה סדורה קווית, צפופה, ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון, ובת־מניה.
2. $(\mathbb{R},<)$ קבוצה סדורה קווית, צפופה, ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון, אבל לא בת־מניה.

משפט 1.12 (משפט קנטור, 1895)

אם $(A,\lhd)$ סדורה קווית, צפופה, ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון, ובת־מניה, אז $(A,\lhd)$ איזומורפית־סדר ל־ $(\mathbb{Q},<)$. כלומר, קיימת $g:\mathbb{Q}\leftrightarrow A$ חד־חד־ערכית ועל כך שלכל $a,b\in\mathbb{Q}$:

$$a<b \iff g(a)\lhd g(b)$$

.

הוכחה: תהי $\mathcal{F}$ אוסף כל הפונקציות $f:X\to Y$ כך ש־:

1. X תת־קבוצה סופית של $\mathbb{Q}$;
2. Y תת־קבוצה סופית של A;
3. f איזומורפיזם, כלומר f חד־חד־ערכית, על ושומרת סדר.

כזכור, $(\mathcal{F},\prec)$ קס"ח.

טענה 1: נניח $q\in\mathbb{Q}$. הקבוצה $D_q=\{f\in\mathcal{F}\mid q\in\operatorname{dom}(f)\}$ שולטת.

הוכחה: נניח $f:X\to Y$ איבר כלשהו ב־ $\mathcal{F}$, ונבקש למצוא $d\in D_q$ כך ש־ $f=d$ או $f\prec d$.

כמובן שאם $q\in\operatorname{dom}(f)$, הרי ש־ $f\in D_q$ וסיימנו.

נניח כעת כי $q\notin\operatorname{dom}(f)$. נסתכל על

$$X_0:=\{x\in X\mid \ x<q\},$$
$$X_1:=\{x\in X\mid \ q<x\}.$$

כיוון ש־ $\mathbb{Q}$ סדורה קווית על־ידי היחס $<$, כך גם תת־הקבוצות הסופיות X_0 ו־ X_1, ולכן ניתן להגדיר

$m_0:=\max(X_0,<)$, כאשר $X_0\neq\emptyset$.

$m_1:=\min(X_1,<)$, כאשר $X_1\neq\emptyset$.

כעת, כיוון ש־ $(A,\lhd)$ צפופה ללא איבר ראשון ואחרון, ניתן לבחור $a\in A$ כך ש־

$f(m_0)\lhd a$ כאשר $X_0\neq\emptyset$, ובנוסף $a\lhd f(m_1)$ כאשר $X_1\neq\emptyset$.

נגדיר $d:X\cup\{q\}\to Y\cup\{a\}$ על־ידי

$$d(p):=\begin{cases} f(p), & p\in X\\ a, & p=q\end{cases}.$$

הבחירה של a מבטיחה כי הפונקציה d חח"ע, על, ושומרת סדר.

אזי $d\in D_q$, ו־ $f\prec d$, כנדרש. $\square$

טענה 2: לכל $a\in A$, הקבוצה $D^a=\{d\in\mathcal{F}\mid a\in\operatorname{Im}(d)\}$ שולטת.

הוכחה: נימוק דואלי המשתמש בכך ש־ $(\mathbb{Q},<)$ צפופה ללא איבר ראשון ואחרון. $\square$

כיוון ש־ $A,\mathbb{Q}$ בנות־מניה, נובע מלמה 1.8 כי קיימת $G\subseteq\mathcal{F}$ סדורה קווית על־ידי $\prec$, ובנוסף:

- $G \cap D_q \neq \emptyset$ לכל $q \in \mathbb{Q}$,
- $G \cap D^a \neq \emptyset$ לכל $a \in A$.

נגדיר $g : \mathbb{Q} \to A$ על־ידי הכלל שלכל $q \in \mathbb{Q}$:

$$\text{(קיימת } f \in G \text{ כך ש־ } f(q) = a) \iff g(q) = a \,.$$

אז משיקולים שכבר פגשנו, g מוגדרת היטב.

טענה 3: g על.

הוכחה: נובע מכך ש־ $G \cap D^a \neq \emptyset$ לכל $a \in A$. □

טענה 4: g חד־חד־ערכית, שומרת סדר.

הוכחה: נניח $q_1 < q_2$ ב־$\mathbb{Q}$.

יהיו $f_1, f_2 \in G$ כך ש־ $q_1 \in \mathrm{dom}(f_1)$, $q_2 \in \mathrm{dom}(f_2)$. נפריד לשני מקרים:

◄ אם $f_1 \prec f_2$, הרי ש־ $q_1, q_2 \in \mathrm{dom}(f_2)$, ואז

$$g(q_1) = f_2(q_1) \lhd f_2(q_2) = g(q_2).$$

במילים פשוטות: f_2 שומרת סדר, ואז g "מקבלת" את זה ממנה.

◄ אם $f_2 \prec f_1$ או $f_2 = f_1$, אז

$$g(q_1) = f_1(q_1) \lhd f_1(q_2) = g(q_2)$$

במילים פשוטות: f_1 שומרת סדר, ואז g "מקבלת" את זה ממנה. ■

תרגיל 1.13 שנו את ההוכחה הנ"ל והראו כי לכל קס"ח בן־מניה $(A, \lhd)$ קיימת העתקה חח"ע שומרת סדר מ־$(A, \lhd)$ ל־$(\mathbb{Q}, <)$.