

הגדרה 2.1 (קנטור, 1883) נאמר כי קבוצה סדורה חלקית $(A, <)$ היא סדורה היטב (*well-ordered*) אם לכל תת-קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון.

הבחנה 2.2 אם $(A, <)$ סדורה היטב ו- $A \supseteq B$, אז $(B, <)$ סדורה קווית והיטב.

שימו לב כי הכיוון ההפוך איננו נכון, למשל $(\mathbb{N}, <)$ סדורה היטב, אך $(\mathbb{Z}, <)$ איננה סדורה היטב.

תרגיל 2.3 קבוצה סדורה קווית היא סדורה היטב אם"מ איננה מכילה עותק של $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

המטרה: למצוא נציגים קנוניים של סדרים טובים.

נציגים של טיפוסים סדר טובים.

מה שבסוף יוביל אותנו למושג שנקרא "סודר".

קבוצות טרנזיטיביות

הגדרה 2.4 (צרמלו, 1916) קבוצה A נקראת טרנזיטיבית אם לכל $x \in A$ ולכל $x \ni y$ מתקיים $A \ni y$.

כלומר:

$$(y \in x \in A) \implies (y \in A)$$

דוגמה 2.5 הקבוצה $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

זוהי קבוצה בת שני איברים: האיבר הראשון קבוצה ריקה, והאיבר השני קבוצה המכילה איבר אחד - הוא הקבוצה ריקה.

נוכיח כי A קבוצה טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $A \ni x$. ישנן שתי אפשרויות:

◀ אם $x = \emptyset$, אז באופן ריק מתקיים כי לכל $x \ni y$ מתקיים $A \ni y$.

◀ אם $x = \{\emptyset\}$, אז לכל $x \ni y$ מתקיים $y = \emptyset$ ואכן $A \ni \emptyset$.

■

טענה 2.6 אם A קבוצה טרנזיטיבית אז גם $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית.¹

הוכחה: נניח $A \cup \{A\} \ni x$ ו- $x \ni y$ כלשהם.

◀ אם $A \ni x$, אז מכך $x \in A$ ו- $y \in A$ טרנזיטיבית, נובע כי $A \ni y$. בפרט $A \cup \{A\} \ni y$.

◀ אם $\{A\} \ni x$, אז $x = A$. היות ו- $A \ni y$ ו- $A = x \ni y$, הרי ש- $A \ni y$. בפרט $A \cup \{A\} \ni y$.

■

תרגיל 2.7 הראו כי הבאים שקולים עבור כל קבוצה A :

1. A טרנזיטיבית;

2. לכל $x \in A$ מתקיים $x \in \mathcal{P}(A)$;

3. $\mathcal{P}(A) \supseteq A$;

4. $A \supseteq \bigcup A$.

מסקנה 2.8 אם A טרנזיטיבית, אז $\mathcal{P}(A)$ טרנזיטיבית. (מסעיף 3 של התרגיל)

טענה 2.9 אם \mathcal{F} משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אז $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{F} [x \in A]\}$ טרנזיטיבית.

¹אנחנו לא מניחים במובלע כי A זרה ל- $\{A\}$. אמנם אחת האקסיומות של תורת הקבוצות מבטיחה כי $A \notin A$, אבל אין כאן בעיה עקרונית עם תסריט בו $A \cup \{A\} = A$.

הוכחה: יהי $\bigcap \mathcal{F} \ni x$, ונניח $x \ni y$. נבקש להראות כי $\bigcap \mathcal{F} \ni y$.

לשם כך, נקבע $\mathcal{F} \ni A$ שרירותית, ונבקש להראות כי $A \ni y$.

- כעת, כיוון ש- $\bigcap \mathcal{F} \ni x$, כמובן $A \ni x$, וכיוון ש- A טרנזיטיבית, הרי ש- $A \ni y$, כמבוקש.

טענה 2.10 אם \mathcal{F} משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אז $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{F} [x \in A]\}$ טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $\bigcup \mathcal{F} \ni x$ ו- $x \ni y$.

יהי $\mathcal{F} \ni A$ ש- $A \ni x$.

- היות ו- A טרנזיטיבית, מתקיים $A \ni y$, ואז $\bigcup \mathcal{F} \ni y$, כמבוקש.

הגדרה 2.11 (פון ניומן, 1923) קבוצה A היא סודר (Ordinal) אם"מ התנאים הבאים מתקיימים:

1. A טרנזיטיבית.

2. (A, \in) סדורה היטב.

מוקדם יותר ראינו כי אם A טרנזיטיבית, אז $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית. כעת נכליל זאת לסודר:

טענה 2.12 אם A סודר, אז $A \cup \{A\}$ סודר.

הוכחה: יש לבדוק כי $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה היטב.

שימו לב כי $(A \cup \{A\}, \in)$ מתקבלת מהקס"ח (A, \in) ע"י הוספת A כאיבר אחרון, ולכן קס"ח.

כעת, נניח $A \cup \{A\} \supseteq B$ לא ריקה, ונוכיח קיומו של איבר ראשון ב- (B, \in) .

◀ אם $A \cap B \neq \emptyset$, אז מההנחה כי (A, \in) סדורה היטב, נובע כי ב- $B \cap A$ יש איבר ראשון, נקרא לו x .

היות ו- $x \in A \cap B$, בפרט $x \in A$, ולכן בסה"כ x איבר ראשון ב- $(B \cup \{A\}, \in)$, ובוודאי ב- (B, \in) .

- אם $A \cap B = \emptyset$, הרי שמכך ש- $(A \cup \{A\}) \cap B \neq \emptyset$, נובע כי $\{A\} = B$. אז האיבר הראשון ב- (B, \in) .

טענה 2.13 אם A סודר, ו- $A \supseteq B$ טרנזיטיבית, אז B סודר.

יתר על כן, במקרה זה מתקיים $A = B$, או $A \ni B$.

הוכחה: כיוון ש- (A, \in) סדורה היטב, ו- $A \supseteq B$, גם (B, \in) סדורה היטב.

בנוסף, נתון כי B טרנזיטיבית, ולכן סה"כ B סודר.

נתבונן במשפחה הבאה:

$$S := \{Z \in A \cup \{A\} \mid Z \supseteq B\}$$

מסרתנו: להראות כי $A = B$, או $A \ni B$. כלומר, כי B שייכת ל- S .

כיוון ש- A סודר, הקבוצה $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה היטב (טענה 2.12).

כיוון ש- $A \supseteq B$, נובע כי $A \in S$ ובפרט S תת-קבוצה לא ריקה של סודר. לכן, ניתן להגדיר $\bar{A} := \min(S, \in)$.

כמובן $\bar{A} \supseteq B$.

אם $\bar{A} = B$, הרי ש- B שייכת ל- S , וסיימנו. לכן, נניח בשלילה כי $\bar{A} \not\supseteq B$, ונקבע $\bar{A} \setminus B \ni x$ כלשהו.

תת-טענה. קיים $z \in B$ כך ש- $x \ni z$.

הוכחה: נניח אחרת.

כיוון ש- $x \in \bar{A} \ni A \cup \{A\}$ והאחרונה טרנזיטיבית, מתקיים כי $A \cup \{A\} \ni x$.

יהי $z \in B$ כלשהו. אז $A \cup \{A\} \ni \bar{A} \supseteq B \ni z$ ולכן גם $A \cup \{A\} \ni z$.

היות ו- $(A \cup \{A\}, \in)$ סודר היא בפרט סדורה קווית, וכעת נובע מהנחת השלילה כי $x \ni z$.

התקבל כי לכל $z \ni B$ מתקיים $x \ni z$ ולכן $x \supseteq B$.

סה"כ $x \ni A \cup \{A\}$ ו- $x \supseteq B$, ולכן $S \ni x$.

אבל $x \ni \bar{A}$, בסתירה למינימליות של \bar{A} ב- (S, \in) .

■

תהי, אם כן, $B \ni z$, כך ש- $z \ni x$.

■

היות ו- B טרנזיטיבית, נובע כי $B \ni x$, בסתירה לבחירת x כאיבר ב- $\bar{A} \setminus B$.

טענה 2.14 אם A סודר ו- $A \ni B$, אז B סודר.

הוכחה: A טרנזיטיבית, ו- $A \ni B$, ולכן $A \supseteq B$. אז מטענה 2.13 מספיק להראות כי B טרנזיטיבית.

נניח $B \ni x \ni y$, ונראה כי $B \ni y$.

כיוון ש- $x \ni B \ni A$ ו- A טרנזיטיבית, מתקיים $A \ni x$.

כיוון ש- $x \ni y \ni A$ ו- A טרנזיטיבית, מתקיים $A \ni y$.

סה"כ קיבלנו כי B, x, y שייכים ל- A .

■

היות ו- (A, \in) סדורה היטב (מספיק סדורה חלקית), נקבל מכך ש- $x \in B$ ו- $x \in B$ כי $y \in B$ כנדרש.

טענה 2.15 אם A סודר, אז $A \notin A$.

הוכחה: כיוון ש- (A, \in) סדורה, מתקיים אי-רפלקסיביות, כלומר, $\neg(x \in x)$ לכל $x \in A$.

■

נניח בשלילה $A \in A$. אז נוכל לקחת $x = A$ ולהסיק כי $(A \in A) \rightarrow$ סתירה.

מסקנה 2.16 אם \mathcal{F} קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\bigcap \mathcal{F}$ הוא סודר השייך ל- \mathcal{F} .

הוכחה: נניח \mathcal{F} קבוצה של סודרים. מטענה 2.9, $B := \bigcap \mathcal{F}$ טרנזיטיבית. יהי $\mathcal{F} \ni A$ סודר כלשהו. אז B תת-קבוצה

טרנזיטיבית של הסודר A , ולכן מטענה 2.13, B סודר וכן מתקיים $B = A$ או $A \ni B$.

נניח בשלילה $B \notin \mathcal{F}$. אז מהשיקול הנ"ל נובע כי $A \ni B$ לכל $A \in \mathcal{F}$. כלומר $\bigcap \mathcal{F} \ni B$. אבל $\bigcap \mathcal{F} = B$ הוא סודר,

■

וקיבלנו $B \ni B$ בסתירה לטענה הקודמת.

ראינו: אם \mathcal{F} קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\min(\mathcal{F}, \in) = \bigcap \mathcal{F}$.

תרגיל: אם \mathcal{F} קבוצה של סודרים, אז $\sup(\mathcal{F}, \in) = \bigcup \mathcal{F}$.

מסקנה 2.17 אם A, B סודרים, אז בדיוק אחד מהבאים מתקיים:³

$$1. A = B$$

$$2. A \in B$$

$$3. B \in A$$

הוכחה: נניח A, B סודרים. נסמן $\mathcal{F} := \{A, B\}$. אז ממסקנה 2.16, $\bigcap \mathcal{F} \ni \mathcal{F}$. כלומר $A = A \cap B$ או $B = A \cap B$.

◀ אם $A = A \cap B$, אז A תת-קבוצה טרנזיטיבית של הסודר B , ולכן מטענה 2.13, $A = B$ או $B \in A$.

■

◀ אם $B = A \cap B$, אז B תת-קבוצה טרנזיטיבית של הסודר A , ולכן מטענה 2.13, $A = B$ או $A \in B$.

² כלומר, אין פרדוקס ראסל בסודרים.

³ נשים לב כי מהטענה הקודמת על אי-רפלקסיביות, לא ייתכנו צירופים של שני סעיפים. אכן, למשל, אם $A \in B \in A$, אז מטרנזיטיביות של A נובע כי $A \in A$, בסתירה לטענה הקודמת.

מוסכמות: סודרים נהוג לסמן באותיות יווניות קטנות: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$.

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \text{ מסמנים}$$

$$\alpha \in \beta \text{ כותבים } \alpha < \beta \text{ במקום}$$

$$\alpha \subseteq \beta \text{ כותבים } \alpha \leq \beta \text{ במקום}^4$$

הבחנה: אם $\alpha < \beta$, אז $\alpha + 1 \leq \beta$.

■ **הוכחה:** כיוון ש- $\alpha \in \beta$ ו- β טרנזיטיבית, הרי ש- $\alpha \subseteq \beta$. סה"כ $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.

טענה 2.18 אם A קבוצה טרנזיטיבית, וכל $x \in A$ סודר, אז A סודר.

הוכחה: נתון כי A טרנזיטיבית, ולכן נותר לוודא כי (A, \in) סדורה היטב.

ממסקנה 2.17, (A, \in) סדורה קווית, ובפרט חלקית.

קעת נניח $A \supseteq B$ לא ריקה.

נסמן $\alpha := \bigcap B$. אז ממסקנה 2.16, α סודר השייך ל- B .

מהגדרת α , לכל $\beta \in B$ מתקיים $\beta \supseteq \alpha$, כלומר $\beta \geq \alpha$.

לכן α איבר ראשון ב- B .

■ סימון: On - אוסף כל הסודרים.

מסקנה 2.19 On איננה קבוצה.

הוכחה: מטענה 2.14, כל איבר של סודר הוא בעצמו סודר, ומכאן כי On טרנזיטיבית.

■ נניח בשלילה כי On קבוצה. אז מטענה 2.18, On סודר. אבל אז $\text{On} \in \text{On}$, בסתירה לטענה 2.15.

טענה 2.20 המחלקה (On, \in) סדורה היטב.

הוכחה: ממסקנה 2.17, המחלקה (On, \in) סדורה קווית. בנוסף, לכל קבוצה $A \subset \text{On}$ (היינו לכל קבוצה A של סודרים) לא ריקה מתקיים כי $\bigcap A$ הוא איבר ראשון ב- (A, \in) .

תרגיל 2.21 הראו כי מחלקת הקבוצות הטרנזיטיביות איננה סדורה קווית לפי \subset .⁵

טענה 2.22 נניח $(A, <)$ סדורה היטב, ו- $f: A \rightarrow A$ העתקה שומרת סדר. אז $f(a) \geq a$ לכל $a \in A$.

הוכחה: נניח כי $\mathcal{S} := \{a \in A \mid f(a) < a\}$ לא ריקה.

יהי a האיבר הראשון ב- \mathcal{S} . אז $b = f(a) < a$.

כיוון ש- f שומרת סדר: $f(b) = f(f(a)) < f(a) = b$.

כלומר $b \in \mathcal{S}$ בסתירה למינימליות a והעובדה ש- $b < a$.

■ **הגדרה 2.23** ריישא של קס"ח $(A, <)$ היא תת-קבוצה $A \supseteq B$ בעלת התכונה שלכל $x \in B$ וכל $y < x$ מתקיים גם $B \ni y$. כלומר, B "סגורה כלפי מטה".

תרגיל 2.24 הראו כי אם A קבוצה טרנזיטיבית, אז כל ריישא של (A, \in) היא טרנזיטיבית.

⁴זיכרו את טענה 2.13.

⁵רמז: בהנתן קבוצה X , התבוננו בקבוצות $(X \cup \{X\})$ ו- $(\mathcal{P}(X) \setminus \{X\})$.

הגדרה 2.25 רישיא נאותה של $(A, <)$ היא רישיא השונה מ- A .

הגדרה 2.26 רישיא ראשית של $(A, <)$ היא תת-קבוצה מהצורה $b_{\downarrow} := \{a \in A \mid a < b\}$ עבור $b \in A$ כלשהו.

הערה 2.27 Initial segment - רישיא נאותה - Proper init. segm. - רישיא ראשית - Principal init. segm.

הבחנה 2.28 כל רישיא נאותה בקבוצה סדורה היטב היא ראשית.

הוכחה: נניח B רישיא נאותה של קבוצה סדורה היטב $(A, <)$. כלומר B רישיא, אבל $A \setminus B$ איננה ריקה. יהי לכן $b := \min(A \setminus B, <)$. קל לוודא כי $B = b_{\downarrow}$.

משפט 2.29 נניח $(A, <)$ סדורה היטב.

1. אם B רישיא ראשית של A , אז $(B, <) \cong (A, <)$.
2. אם $f : A \rightarrow A$ איזומורפיזם סדר⁶, אז f העתקת הזהות.
3. אם $(B, <_B)$ סדורה היטב, ו- $(A, <) \cong (B, <_B)$ אז קיים איזומורפיזם אחד ויחיד המעיד על כך.

הוכחה: נוכיח את הטענות:

1. נניח B רישיא ראשית של A . יהי $b \in B$ כך ש- $B = b_{\downarrow}$. נניח בשלילה $(B, <) \cong (A, <)$. יהי $f : A \rightarrow B$ איזומורפיזם המעיד על כך. בפרט, $f : A \rightarrow A$ העתקה שומרת סדר המקיימת $f(b) < b$, בסתירה לטענה הקודמת.
2. נניח $f : A \rightarrow A$ איזומורפיזם השונה מהזהות. אז $S := \{a \in A \mid f(a) \neq a\}$ לא ריקה. יהי a המינימלי ב- S . אזי:
 - לכל $a > b$, ממינימליות נובע כי $b \notin S$, ולכן $f(b) = b < a$.
 - לכל $a < b$, מטענה 2.22 מקבלים $f(b) \geq b > a$.
 היות ו- $f(a) \neq a$, נסיק יחדיו כי $a \notin \text{Im}(f)$, בסתירה להנחה כי f איזומורפיזם.
3. נניח בשלילה $f : A \rightarrow B$ ו- $g : A \rightarrow B$ איזומורפיזמים שונים. אז $f \circ g^{-1} \circ f$ הינו איזומורפיזם מ- A ל- A שאיננו הזהות, בסתירה לסעיף הקודם.

⁶ חד-חד-ערכי, על, ושומר סדר.