הגדרה 2.1 (קנטור, 1883) נאמר כי קבוצה סדורה חלקית $(A,<)$ היא סדורה היטב *(well-ordered)* אם לכל תת־קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון.

הבחנה 2.2 אם $(A,<)$ סדורה היטב ו־$A \supseteq B$, אז $(B,<)$ סדורה קווית והיטב.

שימו לב כי הכיוון ההפוך איננו נכון, למשל $(\mathbb{N},<)$ סדורה היטב, אך $(\mathbb{Z},<)$ איננה סדורה היטב.

תרגיל 2.3 קבוצה סדורה קווית היא סדורה היטב אמ"מ איננה מכילה עותק של $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

המטרה: למצוא נציגים קנוניים של סדרים טובים.

נציגים של טיפוסי סדר טובים.

מה שבסוף יוביל אותנו למושג שנקרא "סודר".

קבוצות טרנזיטיביות

הגדרה 2.4 (צרמלו, 1916) קבוצה A נקראת טרנזיטיבית אם לכל $x \in A$ ולכל $y \in x$ מתקיים $y \in A$.

כלומר:

$$(y \in x \in A) \Longrightarrow (y \in A)$$

דוגמה 2.5 הקבוצה $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

זוהי קבוצה בת שני איברים: האיבר הראשון קבוצה ריקה, והאיבר השני קבוצה המכילה איבר אחד – הוא הקבוצה ריקה.

נוכיח כי A קבוצה טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $x \in A$. ישנן שתי אפשרויות:

- אם $x = \emptyset$, אז באופן ריק מתקיים כי לכל $y \in x$ מתקיים $y \in A$.
- אם $x = \{\emptyset\}$, אז לכל $y \in x$ מתקיים $y = \emptyset$ ואכן $\emptyset \in A$. ■

טענה 2.6 אם A קבוצה טרנזיטיבית אז גם $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית.[1]

הוכחה: נניח $x \in A \cup \{A\}$ ו־ $y \in x$ כלשהם.

- אם $x \in A$, אז מכך ש־$y \in x \in A$ וש־A טרנזיטיבית, נובע כי $y \in A$. בפרט $y \in A \cup \{A\}$.
- אם $x \in \{A\}$, אז $x = A$. היות ו־ $y \in x = A$, הרי ש־ $y \in A$. בפרט $y \in A \cup \{A\}$. ■

תרגיל 2.7 הראו כי הבאים שקולים עבור כל קבוצה A:

1. A טרנזיטיבית;
2. לכל $x \in A$ מתקיים $x \in \mathcal{P}(A)$;
3. $A \subseteq \mathcal{P}(A)$;
4. $\bigcup A \subseteq A$.

מסקנה 2.8 אם A טרנזיטיבית, אז $\mathcal{P}(A)$ טרנזיטיבית. (מסעיף 3 של התרגיל)

טענה 2.9 אם $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אז $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{F}[x \in A]\}$ טרנזיטיבית.

[1] אנחנו לא מניחים במובלע כי A זרה ל־$\{A\}$. אמנם אחת האקסיומות של תורת הקבוצות מבטיחה כי $A \notin A$, אבל אין כאן בעיה עקרונית עם תסריט בו $A \cup \{A\} = A$.

הוכחה: יהי $x \in \bigcap \mathcal{F}$, ונניח $y \in x$. נבקש להראות כי $y \in \bigcap \mathcal{F}$.

לשם כך, נקבע $A \in \mathcal{F}$ שרירותית, ונבקש להראות כי $y \in A$.

כעת, כיוון ש- $x \in \bigcap \mathcal{F}$, כמובן $x \in A$, וכיוון ש- A טרנזיטיבית, הרי ש-$y \in A$, כמבוקש. ■

טענה 2.10 אם $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אז $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{F}[x \in A]\}$ טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $x \in \bigcup \mathcal{F}$ ו- $y \in x$.

יהי $A \in \mathcal{F}$ כך ש- $x \in A$.

היות ו- A טרנזיטיבית, מתקיים $y \in A$, ואז $y \in \bigcup \mathcal{F}$, כמבוקש. ■

הגדרה 2.11 (פון ניומן, 1923) קבוצה A היא סודר *(Ordinal)* אמ"מ התנאים הבאים מתקיימים:

1. A טרנזיטיבית.
2. $(A, \in)$ סדורה היטב.

מוקדם יותר ראינו כי אם A טרנזיטיבית, אז $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית. כעת נכליל זאת לסודר:

טענה 2.12 אם A סודר, אז $A \cup \{A\}$ סודר.

הוכחה: יש לבדוק כי $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה היטב.

שימו לב כי $(A \cup \{A\}, \in)$ מתקבלת מהקס"ח $(A, \in)$ ע"י הוספת A כאיבר אחרון, ולכן קס"ח.

כעת, נניח $B \subseteq A \cup \{A\}$ לא ריקה, ונוכיח קיומו של איבר ראשון ב-$(B, \in)$.

◄ אם $A \cap B \neq \emptyset$, אז מההנחה כי $(A, \in)$ סדורה היטב, נובע כי ב- $A \cap B$ יש איבר ראשון, נקרא לו x.

היות ו-$x \in A \cap B$, בפרט $x \in A$, ולכן בסה"כ x איבר ראשון ב- $(B \cup \{A\}, \in)$, ובוודאי ב- $(B, \in)$.

◄ אם $A \cap B = \emptyset$, הרי שמכך ש- $(A \cup \{A\}) \cap B \neq \emptyset$, נובע כי $B = \{A\}$. אז A האיבר הראשון ב-$(B, \in)$. ■

טענה 2.13 אם A סודר, ו- $B \subseteq A$ טרנזיטיבית, אז B סודר.

יתר על כן, במקרה זה מתקיים $B = A$, או $B \in A$.

הוכחה: כיוון ש- $(A, \in)$ סדורה היטב, ו- $B \subseteq A$, גם $(B, \in)$ סדורה היטב.

בנוסף, נתון כי B טרנזיטיבית, ולכן סה"כ B סודר.

נתבונן במשפחה הבאה:

$$\mathcal{S} := \{Z \in A \cup \{A\} \mid Z \supseteq B\}$$

מטרתנו: להראות כי $B = A$, או $B \in A$. כלומר, כי B שייכת ל-$\mathcal{S}$.

כיוון ש- A סודר, הקבוצה $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה היטב (טענה 2.12).

כיוון ש-$B \subseteq A$, נובע כי $A \in \mathcal{S}$ ובפרט $\mathcal{S}$ תת-קבוצה לא ריקה של סודר. לכן, ניתן להגדיר $\bar{A} := \min(\mathcal{S}, \in)$.

כמובן $B \subseteq \bar{A}$.

אם $B = \bar{A}$, הרי ש-B שייכת ל-$\mathcal{S}$, וסיימנו. לכן, נניח בשלילה כי $B \subsetneq \bar{A}$, ונקבע $x \in \bar{A} \backslash B$ כלשהו.

תת-טענה. קיים $z \in B$ כך ש-$x \in z$.

הוכחה: נניח אחרת.

כיוון ש-$x \in \bar{A} \in A \cup \{A\}$ והאחרונה טרנזיטיבית, מתקיים כי $x \in A \cup \{A\}$.

יהי $z \in B$ כלשהו. אז $z \in B \subseteq \bar{A} \in A \cup \{A\}$ ולכן גם $z \in A \cup \{A\}$.

היות ו־$(A\cup\{A\},\in)$ סודר היא בפרט סדורה קווית, וכעת נובע מהנחת השלילה כי $z\ni x$.

התקבל כי לכל $z\ni B$ מתקיים $z\ni x$ ולכן $B\supseteq x$.

סה"כ $x\ni A\cup\{A\}$ ו־$B\supseteq x$, ולכן $x\ni\mathcal{S}$.

אבל $x\ni\bar{A}$, בסתירה למינימליות של $\bar{A}$ ב־ $(\mathcal{S},\in)$. ■

תהי, אם כן, $z\ni B$, כך ש־ $x\ni z$.

היות ו־B טרנזיטיבית, נובע כי $x\ni B$, בסתירה לבחירת x כאיבר ב־ $\bar{A}\backslash B$. ■

טענה 2.14 אם A סודר ו־ $B\ni A$, אז B סודר.

הוכחה: A טרנזיטיבית, ו־$B\ni A$, ולכן $B\supseteq A$. אז מטענה 2.13 מספיק להראות כי B טרנזיטיבית.

נניח $y\ni x\ni B$, ונראה כי $y\ni B$.

כיוון ש־ $x\ni B\ni A$ ו־ A טרנזיטיבית, מתקיים $x\ni A$.

כיוון ש־ $y\ni x\ni A$ ו־ A טרנזיטיבית, מתקיים $y\ni A$.

סה"כ קיבלנו כי B,x,y שייכים ל־ A.

היות ו־ $(A,\in)$ סדורה היטב (מספיק סדורה חלקית), נקבל מכך ש־$y\in x$ ו־$x\in B$ כי $y\in B$, כנדרש. ■

טענה 2.15 אם A סודר, אז $A\notin A$.[2]

הוכחה: כיוון ש־ $(A,\in)$ סדורה, מתקיים אי־רפלקסיביות, כלומר, $\neg(x\in x)$ לכל $x\ni A$.

נניח בשלילה $A\in A$. אז נוכל לקחת $x=A$ ולהסיק כי $\neg(A\in A)$. סתירה. ■

מסקנה 2.16 אם $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\bigcap\mathcal{F}$ הוא סודר השייך ל־$\mathcal{F}$.

הוכחה: נניח $\mathcal{F}$ קבוצה של סודרים. מטענה 2.9, $B:=\bigcap\mathcal{F}$ טרנזיטיבית. יהי $A\ni\mathcal{F}$ סודר כלשהו. אז B תת־קבוצה טרנזיטיבית של הסודר A, ולכן מטענה 2.13, B סודר וכן מתקיים $B=A$ או $B\ni A$.

נניח בשלילה $B\notin\mathcal{F}$. אז מהשיקול הנ"ל נובע כי $B\ni A$ לכל $A\ni\mathcal{F}$. כלומר $B\ni\bigcap\mathcal{F}$. אבל $B=\bigcap\mathcal{F}$ הוא סודר, וקיבלנו $B\ni B$ בסתירה לטענה הקודמת. ■

ראינו: אם $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\min(\mathcal{F},\in)=\bigcap\mathcal{F}$.

תרגיל: אם $\mathcal{F}$ קבוצה של סודרים, אז $\sup(\mathcal{F},\in)=\bigcup\mathcal{F}$.

מסקנה 2.17 אם A,B סודרים, אז בדיוק אחד מהבאים מתקיים:[3]

1. $A=B$.
2. $A\in B$.
3. $B\in A$.

הוכחה: נניח A,B סודרים. נסמן $\mathcal{F}:=\{A,B\}$. אז ממסקנה 2.16, $\bigcap\mathcal{F}\ni\mathcal{F}$. כלומר $A\cap B=A$ או $A\cap B=B$.

◀ אם $A\cap B=A$, אז A תת־קבוצה טרנזיטיבית של הסודר B, ולכן מטענה 2.13, $A=B$, או $A\in B$.

◀ אם $A\cap B=B$, אז B תת־קבוצה טרנזיטיבית של הסודר A, ולכן מטענה 2.13, $A=B$, או $B\in A$. ■

[2] כלומר, אין פרדוקס ראסל בסודרים.

[3] נשים לב כי מהטענה הקודמת על אי־רפלקסיביות, לא ייתכנו צירופים של שני סעיפים. אכן, למשל, אם $A\in B\in A$, אז מטרנזיטיביות של A נובע כי $A\in A$, בסתירה לטענה הקודמת.

מוסכמות: סודרים נהוג לסמן באותיות יווניות קטנות: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.

מסמנים $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

כותבים $\alpha < \beta$ במקום $\alpha \in \beta$.

כותבים $\alpha \leq \beta$ במקום $\alpha \subseteq \beta$.[4]

הבחנה: אם $\alpha < \beta$, אז $\alpha + 1 \leq \beta$.

הוכחה: כיוון ש- $\alpha \in \beta$ ו- β טרנזיטיבית, הרי ש- $\alpha \subseteq \beta$. סה"כ $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$. ■

טענה 2.18 אם A קבוצה טרנזיטיבית, וכל $x \in A$ סודר, אז A סודר.

הוכחה: נתון כי A טרנזיטיבית, ולכן נותר לוודא כי $(A, \in)$ סדורה היטב.

ממסקנה 2.17, $(A, \in)$ סדורה קווית, ובפרט חלקית.

כעת נניח $B \subseteq A$ לא ריקה.

נסמן $\alpha := \bigcap B$. אז ממסקנה 2.16, α סודר השייך ל-B.

מהגדרת α, לכל $\beta \in B$ מתקיים $\alpha \subseteq \beta$, כלומר $\alpha \leq \beta$.

לכן α איבר ראשון ב- B. ■

סימון: On - אוסף כל הסודרים.

מסקנה 2.19 O_n לא קבוצה.

הוכחה: מטענה 2.14, כל איבר של סודר הוא בעצמו סודר, ומכאן כי On טרנזיטיבית.

נניח בשלילה כי On קבוצה. אז מטענה 2.18, On סודר. אבל אז $On \in On$, בסתירה לטענה 2.15. ■

טענה 2.20 המחלקה $(On, \in)$ סדורה היטב.

הוכחה: ממסקנה 2.17, המחלקה $(On, \in)$ סדורה קווית. בנוסף, לכל קבוצה $A \subset On$ (היינו לכל קבוצה A של סודרים) לא ריקה מתקיים כי $\bigcap A$ הוא איבר ראשון ב-$(A, \in)$. ■

תרגיל 2.21 הראו כי מחלקת הקבוצות הטרנזיטיביות איננה סדורה קווית לפי $\subset$.[5]

טענה 2.22 אם $(A, <)$ סדורה היטב, ו- $f : A \to A$ העתקה שומרת סדר, אז $a \leq f(a)$ לכל $a \in A$.

הוכחה: נניח כי $\mathcal{S} := \{a \in A \mid f(a) < a\}$ לא ריקה.

יהי a האיבר הראשון ב-$\mathcal{S}$. אז $b = f(a) < a$.

כיוון ש- f שומרת סדר: $f(b) = f(f(a)) < f(a) = b$.

כלומר $b \in \mathcal{S}$ בסתירה למינימליות a והעובדה ש- $b < a$. ■

הגדרה 2.23 רישא של קס"ח $(A, <)$ היא תת-קבוצה $B \subseteq A$ בעלת התכונה שלכל $x \in B$ וכל $y < x$ מתקיים גם $y \in B$. כלומר, B "סגורה כלפי מטה".

תרגיל 2.24 הראו כי אם A קבוצה טרנזיטיבית, אז כל רישא של $(A, \in)$ היא טרנזיטיבית.

[4] זיכרו את טענה 2.13.

[5] רמז: בהנתן קבוצה X, התבוננו בקבוצות $(X \cup \{X\})$ ו-$(\mathcal{P}(X) \setminus \{X\})$.

הגדרה 2.25 ריישא נאותה של $(A,<)$ היא ריישא השונה מ־A.

הגדרה 2.26 ריישא ראשית של $(A,<)$ היא תת־קבוצה מהצורה $b_\downarrow := \{a \in A \mid a < b\}$ עבור $b \in A$ כלשהו.

הערה 2.27 ריישא ־ Initial segment. ריישא נאותה ־ Proper init. segm. ריישא ראשית ־ Principal init. segm.

הבחנה 2.28 כל ריישא נאותה בקבוצה סדורה היטב היא ראשית.

הוכחה: נניח B ריישא נאותה של קבוצה סדורה היטב $(A,<)$. כלומר B ריישא, אבל $A \setminus B$ איננה ריקה. יהי לכן $b := \min(A \setminus B, <)$. קל לוודא כי $B = b_\downarrow$. ■

משפט 2.29 נניח $(A,<)$ סדורה היטב.

1. אם B ריישא ראשית של A, אז $(A,<) \not\cong (B,<)$.
2. אם $f : A \to A$ איזומורפיזם סדר,[6] אז f העתקת הזהות.
3. אם $(B,<_B)$ סדורה היטב, ו־ $(A,<) \cong (B,<_B)$ אז קיים איזומורפיזם אחד ויחיד המעיד על כך.

הוכחה: נוכיח את הטענות:

1. נניח B ריישא ראשית של A. יהי $b \in B$ כך ש־ $B = b_\downarrow$.
   נניח בשלילה $(A,<) \cong (B,<)$. יהי $f : A \to B$ איזומורפיזם המעיד על כך.
   בפרט, $f : A \to A$ העתקה שומרת סדר המקיימת $f(b) < b$, בסתירה לטענה הקודמת.
2. נניח $f : A \to A$ איזומורפיזם השונה מהזהות.
   אז $\mathcal{S} := \{a \in A \mid f(a) \neq a\}$ לא ריקה.
   יהי a המינימלי ב־ $\mathcal{S}$. אזי:
   לכל $b < a$, ממינימליות נובע כי $b \notin \mathcal{S}$, ולכן $f(b) = b < a$.
   לכל $b > a$, מטענה 2.22 מקבלים $f(b) \geq b > a$.
   היות ו־ $f(a) \neq a$, נסיק יחדיו כי $a \notin \mathrm{Im}(f)$, בסתירה להנחה כי f איזומורפיזם.
3. נניח בשלילה $f : A \to B$ ו־ $g : A \to B$ איזומורפיזמים שונים.
   אז $g^{-1} \circ f$ הינו איזומורפיזם מ־ A ל־ A שאיננו הזהות, בסתירה לסעיף הקודם.

■

[6] חד־חד־ערכי, על, ושומר סדר.