הגדרה 2.1 (קנטור, 1883) נאמר כי קבוצה סדורה קווית $(A,<)$ היא סדורה היטב *(well-ordered)* אם לכל תת־קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון.

הבחנה 2.2 אם $(A,<)$ סדורה היטב ו־$B \subseteq A$, אז $(B,<)$ סדורה היטב.

שימו לב כי הכיוון ההפוך איננו נכון, למשל $(\mathbb{N},<)$ סדורה היטב, אך $(\mathbb{Z},<)$ איננה סדורה היטב.

תרגיל 2.3 קבוצה סדורה קווית היא סדורה היטב $\iff$ איננה מכילה עותק של $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

המטרה: למצוא נציגים קנוניים של סדרים טובים.

נציגים של טיפוסי סדר טובים.

מה שבסוף יוביל אותנו למושג שנקרא "סודר".

קבוצות טרנזיטיביות

הגדרה 2.4 (צרמלו, 1916) קבוצה A נקראת טרנזיטיבית אם לכל $x \in A$ ולכל $y \in x$ מתקיים $y \in A$.

כלומר:

$$(y \in x \in A) \to (y \in A)$$

דוגמה 2.5 הקבוצה $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

זוהי קבוצה בת שני איברים: האיבר הראשון קבוצה ריקה, והאיבר השני קבוצה המכילה איבר אחד - הוא הקבוצה ריקה.

נוכיח כי A קבוצה טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $x \in A$. ישנן שתי אפשרויות:

1. אם $x = \emptyset$ אז באופן ריק מתקיים כי לכל $y \in x$ מתקיים $y \in A$.
2. אם $x = \{\emptyset\}$, ו־$y \in x$, אז $y = \emptyset$ ואכן $y \in A$.

■

טענה 2.6 אם A קבוצה טרנזיטיבית אז גם $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $x \in A \cup \{A\}$ ו־ $y \in x$.

1. אם $x \in A$, אז היות ו־ A טרנזיטיבית, ומתקיים $y \in x \in A$, הרי ש־ $y \in A \subseteq A \cup \{A\}$.
2. אם $x = A$, אז היות ו־ $y \in x = A$, הרי ש־ $y \in A \subseteq A \cup \{A\}$.

■

תרגיל 2.7 הראו כי הבאים שקולים עבור כל קבוצה A:

1. A טרנזיטיבית;
2. לכל $x \in A$ מתקיים $x \in \mathcal{P}(A)$;
3. $A \subseteq \mathcal{P}(A)$;
4. $\bigcup A \subseteq A$.

מסקנה 2.8 אם A טרנזיטיבית, אז $\mathcal{P}(A)$ טרנזיטיבית.

טענה 2.9 אם $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אז $\bigcap\mathcal{F} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{F}[x \in A]\}$ טרנזיטיבית.

הוכחה: יהי $x \in \bigcap\mathcal{F}$, ונניח $y \in x$. נבקש להראות כי $y \in \bigcap\mathcal{F}$.

לשם כך, נקבע $A \in \mathcal{F}$ שרירותית, ונבקש להראות כי $y \in A$.

כעת, כיוון ש־ $x \in \bigcap\mathcal{F}$, כמובן $x \in A$, וכיוון ש־ A טרנזיטיבית, הרי ש־$y \in A$, כמבוקש. ■

טענה 2.10 אם $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות טרנזיטיביות, אז $\bigcup\mathcal{F} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{F}[x \in A]\}$ טרנזיטיבית.

הוכחה: נניח $x \in \bigcup\mathcal{F}$ ו־ $y \in x$.

יהי $A \in \mathcal{F}$ כך ש־ $x \in A$.

היות ו־ A טרנזיטיבית, מתקיים $y \in A$, ואז $y \in \bigcup\mathcal{F}$, כמבוקש. ■

הגדרה 2.11 (פון ניומן, 1923) קבוצה A היא סודר (Ordinal) אמ"מ התנאים הבאים מתקיימים:

1. A טרנזיטיבית.
2. $(A,\in)$ סדורה היטב.

מוקדם יותר ראינו כי אם A טרנזיטיבית, אז $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית. כעת נכליל זאת לסודר:

טענה 2.12 אם A סודר, אז $A \cup \{A\}$ סודר.

הוכחה: יש לבדוק כי $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה היטב.

ראשית, נוודא כי היא סדורה קווית. נניח $x, y \in A \cup \{A\}$ שונים.

- אם $x, y \in A$, אז $x \in y$ או $y \in x$ (כיוון ש־ $(A,\in)$ עצמה סדורה קווית).
- אחרת, בה"כ, $y = a$. אז $x \in A$, וכמובן $x \in y$.

אז ראינו כי $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה קווית, ויתר על כן, A **איבר אחרון בקבוצה סדורה זו.**

לבסוף, נניח $B \subseteq A \cup \{A\}$ לא ריקה, ונוכיח קיומו של איבר ראשון ב־$(B,\in)$.

- אם $A \cap B \neq \emptyset$, אז מההנחה כי $(A,\in)$ סדורה היטב, נובע כי ב־ $A \cap B$ יש איבר ראשון, נקרא לו x.
  היות ו־$x \in A \cap B$, בפרט $x \in A$, ולכן בסה"כ x איבר ראשון ב־ $(B \cup \{A\}, \in)$, ובוודאי ב־ $(B,\in)$.
- אם $A \cap B = \emptyset$, הרי שמכך ש־ $(A \cup \{A\}) \cap B \neq \emptyset$, נובע כי $B = \{A\}$. אז A האיבר הראשון (והיחיד) ב־$(B,\in)$.

■

טענה 2.13 אם A סודר, ו־ $B \subseteq A$ טרנזיטיבית, אז B סודר.

יתר על כן, במקרה זה מתקיים $B = A$, או $B \in A$.

הוכחה: כיוון ש־ $(A,\in)$ סדורה היטב, ו־ $B \supseteq A$, גם $(B,\in)$ סדורה היטב.

בנוסף, נתון כי B טרנזיטיבית, ולכן סה"כ B סודר.

נתבונן במשפחה הבאה:

$$\mathcal{S} = \{Z \in A \cup \{A\} \mid \ Z \supseteq B\}$$

כיוון שנתון כי $B \supseteq A$, נובע כי $A \ni \mathcal{S}$, ובפרט $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

כיוון ש־ A סודר, הקבוצה $(A \cup \{A\}, \in)$ סדורה היטב (טענה 2.12), ולכן, סה"כ ניתן לקחת $\bar{A} = \min(\mathcal{S}, \in)$. כמובן $B \supseteq \bar{A}$.

אם $\bar{A} = B$, הרי ש־$B \ni \mathcal{S}$, ובפרט $B \in A \cup \{A\}$ כמבוקש.

לכן, נניח בשלילה כי $B \supsetneq \bar{A}$, ונקבע $x \ni \bar{A} \backslash B$ כלשהו. נוכיח תת־טענה:

תת־טענה. קיים $z \ni B$ כך ש־$x \ni z$.

הוכחה: נניח אחרת. כיוון ש־ $(\bar{A}, \in)$ סדורה קווית, $x \ni \bar{A}$ ו־ $B \supseteq \bar{A}$, נובע מהנחת השלילה כי לכל $z \ni B$ יתקיים $z \ni x$. כלומר $B \supseteq x$.

כיוון ש־ $x \ni \bar{A} \ni A \cup \{A\}$ נקבל מהטרנזיטיביות של האחרונה כי $x \ni A \cup \{A\}$. סה"כ, $x \ni \mathcal{S}$.

אבל $x \ni \bar{A}$, בסתירה למינימליות של $\bar{A}$ ב־ $(\mathcal{S}, \in)$. ■

תהי, אם כן, $z \ni B$, כך ש־ $x \ni z$.

היות ו־B טרנזיטיבית, נובע כי $x \ni B$, בסתירה לבחירת x כאיבר ב־ $\bar{A} \backslash B$. ■

טענה 2.14 אם A סודר ו־ $B \ni A$, אז B סודר.

הוכחה: A טרנזיטיבית, ו־$B \ni A$, ולכן $B \supseteq A$. אז מטענה 2.13 מספיק להראות כי B טרנזיטיבית.

נניח $y \ni x \ni B$, ונראה כי $y \ni B$.

כיוון ש־ $x \ni B \ni A$ ו־ A טרנזיטיבית, מתקיים $x \ni A$.

כיוון ש־ $y \ni x \ni A$ ו־ A טרנזיטיבית, מתקיים $y \ni A$.

סה"כ קיבלנו כי B, x, y שייכים ל־ A.

היות ו־ $(A, \in)$ סדורה היטב (מספיק סדורה חלקית), נקבל מכך ש־$y \in x$ ו־$x \in B$ כי $y \in B$, כנדרש. ■

טענה 2.15 אם A סודר, אז $A \notin A$.[1]

הוכחה: כיוון ש־ $(A, \in)$ סדורה, מתקיים אי־רפלקסיביות, כלומר, $\neg(x \in x)$ לכל $x \ni A$.

נניח בשלילה $A \in A$. אז נוכל לקחת $x = A$ ולהסיק כי $\neg(A \in A)$. סתירה. ■

מסקנה 2.16 אם $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\bigcap \mathcal{F}$ הוא סודר השייך ל־$\mathcal{F}$.

הוכחה: נניח $\mathcal{F}$ קבוצה של סודרים. מטענה 2.9, $B = \bigcap \mathcal{F}$ טרנזיטיבית. יהי $A \ni \mathcal{F}$ סודר כלשהו. אז B תת־קבוצה טרנזיטיבית של הסודר A, ולכן מטענה 2.13, B סודר וכן מתקיים $B = A$ או $B \ni A$.

נניח בשלילה $B \notin \mathcal{F}$. אז מהשיקול הנ"ל נובע כי $B \ni A$ לכל $A \ni \mathcal{F}$. כלומר $B \ni \bigcap \mathcal{F}$. אבל $\bigcap \mathcal{F} = B$ הוא סודר, וקיבלנו $B \ni B$ בסתירה לטענה הקודמת. ■

ראינו: אם $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\bigcap \mathcal{F} = \min(\mathcal{F})$.

תרגיל: אם $\mathcal{F}$ קבוצה של סודרים, אז $\bigcup \mathcal{F} = \sup(\mathcal{F})$.

[1] כלומר, אין פרדוקס ראסל בסודר.

מסקנה 2.17 אם A, B סודרים, אז בדיוק אחד מהבאים מתקיים:[2]

1. $A = B$.
2. $A \in B$.
3. $B \in A$.

הוכחה: נניח A, B סודרים. נסמן $\mathcal{F} = \{A, B\}$. אז ממסקנה 2.16, $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$. כלומר $A = A \cap B$ או $B = A \cap B$.

- אם $A = A \cap B$, אז A תת־קבוצה טרנזיטיבית של הסודר B, ולכן מטענה 2.13, $A = B$, או $A \in B$.
- אם $B = A \cap B$, אז B תת־קבוצה טרנזיטיבית של הסודר A, ולכן מטענה 2.13, $A = B$, או $B \in A$.

■

מוסכמות: סודרים נהוג לסמן באותיות יווניות קטנות: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.

מסמנים $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

כותבים $\alpha < \beta$ במקום $\alpha \in \beta$.

כותבים $\alpha \leq \beta$ במקום $\alpha \subseteq \beta$.[3]

הבחנה: אם $\alpha < \beta$, אז $\alpha + 1 \leq \beta$.

הוכחה: כיוון ש־ $\alpha \in \beta$ ו־ β טרנזיטיבית, הרי ש־ $\alpha \subseteq \beta$. סה"כ $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$. ■

טענה 2.18 אם A קבוצה טרנזיטיבית, וכל $x \in A$ סודר, אז A סודר.

הוכחה: ממסקנה 2.17, $(A, \in)$ סדורה קווית.

כעת נניח $B \subseteq A$ לא ריקה.

נסמן $\alpha = \bigcap B$. אז ממסקנה 2.16, α סודר השייך ל־B. מהגדרת α, לכל $\beta \in B$ מתקיים $\alpha \subseteq \beta$, כלומר $\alpha \leq \beta$.

לכן α איבר ראשון ב־ B. ■

סימון: On - אוסף כל הסודרים.

מסקנה 2.19 O_n לא קבוצה.

הוכחה: מטענה 2.14, כל איבר של סודר הוא בעצמו סודר, ומכאן כי On טרנזיטיבית.

נניח בשלילה כי On קבוצה. אז מטענה 2.18, OnL סודר. אבל אז $On \in On$, בסתירה לטענה 2.15. ■

טענה 2.20 המחלקה $(On, \in)$ סדורה היטב.

הוכחה: ממסקנה 2.17, המחלקה $(On, \in)$ סדורה קווית. בנוסף, לכל קבוצה $A \subset On$ (היינו לכל קבוצה A של סודרים) לא ריקה מתקיים כי $\bigcap A$ הוא איבר ראשון ב־$(A, \in)$. ■

[2] נשים לב כי מהטענה הקודמת על אי־רפלקסיביות, לא ייתכנו צירופים של שני סעיפים. אכן, למשל, אם $A \in B \in A$, אז מטרזטיביות של A נובע כי $A \in A$, בסתירה לטענה הקודמת.

[3] זיכרו את טענה 2.13.

תרגיל 2.21 הראו כי מחלקת הקבוצות הטרנזיטיביות איננה סדורה קווית לפי $\subset$.[4]

טענה 2.22 אם $(A,<)$ סדורה היטב, ו־ $f:A\to A$ העתקה שומרת סדר, אז $f(a)\geq a$ לכל $A\ni a$.

הוכחה: נניח כי $\mathcal{S}=\{a\in A\mid f(a)<a\}$ לא ריקה.

יהי a האיבר הראשון ב־$\mathcal{S}$. אז $b=f(a)<a$.

כיוון ש־ f שומרת סדר: $f(b)=f(f(a))<f(a)=b$.

כלומר $\mathcal{S}\ni b$ בסתירה למינימליות a והעובדה ש־ $b<a$. ■

הגדרה 2.23 רישא של קס"ח $(A,<)$ היא תת־קבוצה $B\subseteq A$ בעלת התכונה שלכל $B\ni x$ וכל $y<x$ מתקיים גם $B\ni y$. כלומר, B "סגורה כלפי מטה".

תרגיל 2.24 הראו כי אם A קבוצה טרנזיטיבית, אז כל רישא של $(A,\in)$ היא טרנזיטיבית.

הגדרה 2.25 רישא נאותה של $(A,<)$ היא רישא B השונה מ־A.

הגדרה 2.26 רישא ראשית של $(A,<)$ היא תת־קבוצה מהצורה $b_\downarrow=\{a\in A\mid a<b\}$ עבור $A\ni b$ כלשהו.

הערה 2.27 רישא ־ Initial segment. רישא נאותה ־ Proper init. segm. רישא ראשית ־ Principal init. segm.

הבחנה 2.28 כל רישא נאותה בקבוצה סדורה היטב היא ראשית.

הוכחה: נניח B רישא נאותה של קבוצה סדורה היטב $(A,<)$. כלומר B רישא, אבל $A\setminus B$ איננה ריקה. יהי לכן $b:=\min(A\setminus B,<)$. קל לוודא כי $B=b_\downarrow$. ■

משפט 2.29 נניח $(A,<)$ סדורה היטב.

1. אם B רישא ראשית של A, אז $(A,<)\ncong(B,<)$.
2. אם $f:A\to A$ איזומורפיזם סדר,[5] אז f העתקת הזהות.
3. אם $(B,<_B)$ סדורה היטב, ו־ $(A,<)\cong(B,<_B)$ אז קיים איזומורפיזם אחד ויחיד המעיד על כך.

הוכחה: נוכיח את הטענות:

1. נניח B רישא ראשית של A. יהי $B\ni b$ כך ש־ $B=b_\downarrow$.
   נניח בשלילה $(A,<)\cong(B,<)$. יהי $f:A\to B$ איזומורפיזם המעיד על כך.
   בפרט, $f:A\to A$ העתקה שומרת סדר המקיימת $f(b)<b$, בסתירה לטענה הקודמת.
2. נניח $f:A\to A$ איזומורפיזם, השונה מהזהות.
   אז $\mathcal{S}=\{a\in A\mid f(a)\neq a\}$ לא ריקה.
   יהי a המינימלי ב־ $\mathcal{S}$. אזי:
   לכל $b<a$, ממינימליות נובע כי $b\notin\mathcal{S}$, ולכן $f(b)=b<a$.
   לכל $a<b$, מטענה 2.22 מקבלים $f(b)\geq b>a$.
   היות ו־ $f(a)\neq a$, נסיק יחדיו כי $a\notin\operatorname{Im}(f)$, בסתירה להנחה כי f איזומורפיזם.
3. נניח בשלילה $f:A\to B$ ו־ $g:A\to B$ איזומורפיזמים שונים.
   אז $g^{-1}\circ f$ הינו איזומורפיזם מ־ A ל־ A שאיננו הזהות, בסתירה לסעיף הקודם.

■

[4] רמז: בהנתן קבוצה X, התבוננו בקבוצות $(X\cup\{X\})$ ו־$(\mathcal{P}(X)\setminus\{X\})$.

[5] שומר סדר, חד־חד־ערכי ועל.