תזכורת:

- אם $(A,<)$ סדורה היטב ו־ $f:A\to A$ העתקה שומרת סדר, אז $f(a)\geq a$ לכל $a\in A$.
- אם $B=b_{\downarrow}=\{a\in A\mid a<b\}$ רישא ראשית של A אז $(A,<)\ncong(B,<)$.
- סדרים טובים הם צפידים: אם $f:A\to A$ איזומורפיזם שומר סדר של סדר טוב $(A,<)$, אז f העתקת הזהות.
- אם $(B,<_B)$ סדר־איזומורפי לקבוצה סדורה היטב $(A,<)$, אז קיים איזומורפיזם יחיד המעיד על כך.

טענה 3.1 אם $\beta\in\alpha$ סודרים, אז β רישא של $(\alpha,\in)$, ולכן $(\alpha,\in)\ncong(\beta,\in)$.

הוכחה: נתבונן ברישא הנאותה של $(\alpha,\in)$:

$$\beta_{\downarrow}=\{a\in\alpha\mid a<\beta\}=\{a\in\alpha\mid a\in\beta\}$$

כיוון ש־ $\beta\in\alpha$ ו־ α טרנזיטיבית $\beta\subseteq\alpha$, ואז:

$$=\{a\in\beta\mid a\in\beta\}=\beta$$

■

מסקנה 3.2 אם α,β סודרים המקיימים $(\beta,\in)\cong(\alpha,\in)$, אזי $\alpha=\beta$.

הוכחה: בשיעור הקודם ראינו כי $(On,\in)$ סדורה קווית (אפילו היטב). לכן, אם $\beta\neq\alpha$, ניתן בה"כ להניח כי $\beta\in\alpha$. אבל אז נקבל סתירה לטענה הקודמת. ■

משפט 3.3 (קנטור, 1897) נניח $(A,<_A)$ $(B,<_B)$ סדרים טובים. אז בדיוק אחד מהבאים מתקיים:

1. $(A,<_A)\cong(B,<_B)$.
2. $(B,<_B)$ איזומורפיזי לרישא ראשית של $(A,<_A)$.
3. $(A,<_A)$ איזומורפיזי לרישא ראשית של $(B,<_B)$.

והאיזומורפיזם תמיד יחיד (מהצפידות של סדרים טובים).

הוכחה: נסמן

$$f=\{(a,b)\in A\times B\mid(a_{\downarrow},<_A)\cong(b_{\downarrow},<_B)\}$$

תת־טענה 1: f פונקציה.

הוכחה: אחרת, קיימים $a\in A$ ו־ $b_1\neq b_2$ ב־ B כך ש־

$$\begin{aligned}(a_{\downarrow},<_A)&\cong(b_{1\downarrow},<_B)\\(a_{\downarrow},<_A)&\cong(b_{2\downarrow},<_B)\end{aligned}$$

בפרט: $(b_{1\downarrow},<_B)\cong(b_{2\downarrow},<_B)$.
בלי הגבלת הכלליות $b_1<_B b_2$. אז קיבלנו כי $(b_{2\downarrow},<_B)$ איזומורפית לרישא ראשית של עצמה. סתירה!

מש"ל תת־טענה 1☒

תת־טענה 2: f חד־חד־ערכית.

הוכחה: אחרת, באופן דומה לתת־טענה 1, ניתן יהיה למצוא $a_1<_A a_2$ ב־ A כך ש־ $(a_{1\downarrow},<_A)\cong(a_{2\downarrow},<_A)$. סתירה!

מש"ל תת־טענה 2☒

תת־טענה 3: f שומרת סדר.

הוכחה: נניח $f \ni (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ ו־ $a_1 <_A a_2$. נבקש להראות כי $b_1 <_B b_2$.

כיוון ש־ $a_{1\downarrow}$ רישא ראשית של $a_{2\downarrow}$, והאחרון איזומורפי ל־ $b_{2\downarrow}$, הרי ש־ $a_{1\downarrow}$ איזומורפי לרישא ראשית של $b_{2\downarrow}$.

כיוון ש־ $a_{1\downarrow}$ איזומורפי ל־ $b_{1\downarrow}$, נסיק סך־הכל כי $b_{1\downarrow}$ איזומורפי לרישא ראשית של $b_{2\downarrow}$.

תהי לכן $b \in b_{2\downarrow}$ כך ש־ $b_{1\downarrow} \cong b_\downarrow$.

אם $b <_B b_1$, הרי ש־ $b_\downarrow$ איזומורפית לרישא ראשית של עצמה (היא $b_{1\downarrow}$).

אם $b_1 <_B b$, הרי ש־ $b_{1\downarrow}$ איזומורפית לרישא ראשית של עצמה (היא $b_\downarrow$).

לכן, האפשרות היחידה היא כי $b = b_1$. בפרט, $b_1 \in b_{2\downarrow}$, ואזי $b_1 <_B b_2$ כמבוקש.

מש"ל תת־טענה 3☒

תת־טענה 4: $\mathrm{dom}(f)$ היא רישא של $(A, <_A)$.

הוכחה: נניח $(a, b) \in f$, ו־ $a' < a$. נבקש להראות כי $a' \in \mathrm{dom}(f)$.

כיוון ש־ $(a, b) \in f$, יהי $\pi : a_\downarrow \leftrightarrow b_\downarrow$ איזומורפיזם־סדר. נתבונן ב־ $b' = \pi(a')$. אז בדומה להוכחת תת־טענה 3, $\pi \restriction a'_\downarrow$ מהווה איזומורפיזם־סדר מ־ $a'_\downarrow$ ל־ $b'_\downarrow$, ולכן $(a', b') \in f$. בפרט, $a' \in \mathrm{dom}(f)$.

מש"ל תת־טענה 4☒

תת־טענה 5: $\mathrm{Im}(f)$ רישא של $(B, <_B)$.

הוכחה: דומה להוכחת תת־טענה 4.

מש"ל תת־טענה 5☒

ננתח כעת את כל הצירופים האפשריים:

1. אם $\mathrm{dom}(f) = A$ ו־ $\mathrm{Im}(f) = B$, אז $(A, <_A) \cong (B, <_B)$.
2. אם $\mathrm{dom}(f) = A$ ו־ $\mathrm{Im}(f) \neq B$, אז יהי b האיבר הראשון ב־ $B \backslash \mathrm{Im}(f)$. מתת־טענה 5, $\mathrm{Im}(f) = b_\downarrow$, ואז f מעידה כי $(A, <_A)$ איזומורפיזית לרישא של $(B, <_B)$ שהיא $b_\downarrow$.
3. אם $\mathrm{dom}(f) \neq A$ ו־ $\mathrm{Im}(f) = B$, אז מתת־טענה 4, קיים $a \in A$ כך ש־ $\mathrm{dom}(f) = a\downarrow$, ואז f^{-1} מעידה כי $(B, <_B)$ איזומורפיזית לרישא של $(A, <_A)$, היא $a_\downarrow$.
4. לא ייתכן כי $\mathrm{dom}(f) \neq A$ וגם $\mathrm{Im}(f) \neq B$, שכן אחרת קיימים $a \in A$ ו־$b \in B$ כך ש־ $\mathrm{dom}(f) = a_\downarrow$, ו־$\mathrm{Im}(f) = b_\downarrow$. אבל אז f מעידה כי $(a_\downarrow, <_A) \cong (b_\downarrow, <_B)$ בסתירה לכך ש־ $(a, b) \notin f$.

■

הגדרה 3.4 סודר α נקרא סודר עוקב אמ"מ קיים סודר β כך ש־ $\alpha = \beta + 1$. אחרת α נקרא סודר גבולי.

תרגיל 3.5 סודר α הוא גבולי אמ"מ $\alpha = \bigcup \alpha$.

הגשמת המספרים הטבעיים

נגדיר:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ n+1 &= n \cup \{n\} \end{aligned}$$

למשל

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} \cup \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

מדוע אלו סודרים? ההוכחה היא באינדוקציה:

- 0 הוא הקבוצה הריקה, שהיא כמובן סודר.
- אם n סודר, אז מטענה מהרצאה 2, גם $n \cup \{n\}$ סודר.

נסמן:

$$\omega = \{n \mid n \text{ is a natural number}\}.$$

זוהי קבוצה טרנזיטיבית של סודרים, ולכן היא בעצמה סודר!

הבחנה 3.6 סודר α הוא סופי אמ"מ $\alpha \in \omega$.

הוכחה: נניח α סודר ו־$\alpha \notin \omega$. כיוון שכל שני סודרים ברי השוואה, נקבל $\omega \leq \alpha$.
אבל אז $\omega \subseteq \alpha$, כלומר α מכיל את הקבוצה האינסופית ω. ■

הערה 3.7 במקרה הסופי, העוצמה של הסודר שווה לסודר עצמו.

דוגמאות: 3 סודר עוקב.

0 סודר גבולי.

ω סודר גבולי.

$\omega + 1$ סודר עוקב.

משפט 3.8 (Mirimanoff, 1917) לכל קבוצה סדורה היטב $(A,<)$ קיים סודר (יחיד) α כך ש־ $(\alpha, \in) \cong (A,<)$.

הוכחה: נתבונן ב־

$$f = \{(a,\beta) \mid a \in A,\ \beta - \text{ordinal},\ (\beta, \in) \cong (a_{\downarrow}, <)\}$$

נימוקים דומים לאלו שראינו היום מבססים כי f היא פונקציה חד־חד־ערכית ושומרת סדר.
שימו לב כי $\operatorname{Im}(f)$ היא קבוצה טרנזיטיבית של סודרים (כמו תת־טענה 5) ולכן קיים סודר α עבורו $\operatorname{Im}(f) = \alpha$.
אם $\operatorname{dom}(f) \neq A$ אז קיים $a \in A$ כך ש־ $\operatorname{dom}(f) = a_{\downarrow}$ (כמו בתת־טענה 4) , אבל אז: $\alpha \cong a_{\downarrow}$, כלומר $(a,\alpha) \in f$.
בסתירה לכך ש־ $a \notin f$.
לכן, $\operatorname{dom}(f) = A$, ואז f מהווה איזומורפיזם מ־A כולה לסודר כלשהו, הוא α. ■

הגדרה 3.9 לכל קבוצה סדורה היטב $(A,<)$, נסמן את טיפוס הסדר של הקבוצה בסימון $\operatorname{otp}(A,<)$. זהו הסודר היחיד α כך ש־ $(\alpha, \in) \cong (A,<)$. (הנציג הקנוני של הסדר הטוב).

אריתמטיקה של סודרים

חיבור קס"חים (קנטור, 1883)

בהנתן קבוצות סדורות חלקית $(A,<_A)$, $(B,<_B)$, נגדיר את חיבורם להיות:

$$(C,<_C) \stackrel{\text{def}}{=} (A,<_A) + (B,<_B)$$

באופן הבא:

$$\begin{aligned} C &= (A \times \{0\}) \uplus (B \times \{1\}) \\ &= \{(a,0) \mid a \in A\} \uplus \{(b,1) \mid b \in B\} \end{aligned}$$

יחס הסדר מוגדר על־ידי:

$$(x,i) <_C (y,j) \iff \begin{array}{l} i < j \\ \text{או} \\ i = j = 0 \ \wedge\ x <_A y \\ \text{או} \\ i = j = 1 \ \wedge\ x <_B y \end{array}$$

הערה 3.10 אם הסדרים $<_A, <_B$ סדרים קוויים אז גם $<_C$ כזה. אם הם סדרים טובים אז גם $<_C$ כזה.

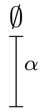
חיבור סודרים

הגדרה 3.11 עבור סודרים α, β נגדיר:

$$\alpha + \beta = \mathrm{otp}\left((\alpha, \in) + (\beta, \in)\right)$$

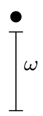
הערה 3.12 ראינו מקודם את ההגדרה $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.
שזה הקבוצה α ומוסיפים מעליה את α כאיבר מקסימלי:

בהגדרה שראינו עכשיו, $\alpha + 1$ הוא הקבוצה α ומוסיפים מעליה את $\emptyset$ כאיבר מקסימלי:

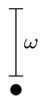


ניתן לראות כי אלו סדרים איזומורפיים, ולכן שתי ההגדרות מתלכדות.

הערה 3.13 חיבור סודרים היא לא פעולה חילופית!
עבור המקרה הסופי היא כן חילופית כי הסכום עבור הסודרים הסופיים מתלכד עם סכום רגיל של המספרים הטבעיים.
עבור המקרה האינסופי:



יש איבר אחרון $\qquad \omega + 1 > \omega$



אין איבר אחרון $\qquad 1 + \omega = \omega$

$$\omega + 1 > 1 + \omega$$

מקצת תכונות של חיבור סודרים

1. $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$.
2. אם $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2$, אז $\beta_1 = \beta_2$.
3. אם $\beta_1 < \beta_2$ אז $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$.
4. אסוציאטיביות: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

הוכחה: נוכיח את התכונות:

1. ברור.

2. ניקח איזומורפיזם מ־$\alpha+\beta_1$ ל־$\alpha+\beta_2$. מצפידות, הצמצום שלו על α הוא הזהות, ולכן הצמצום שלו על מה שנותר לאחר הסרת α הוא איזומורפיזם מהעותק של β_1 לעותק של β_2.
3. כי $\alpha+\beta_1$ איזומורפיזי לרישא של $\alpha+\beta_2$.
4. אם נקח $(A_i,<_i)$ קבוצות סדורות היטב כאשר מתקיים:

$$\begin{aligned}\operatorname{otp}(A_1,<_1) &= \alpha\\ \operatorname{otp}(A_2,<_2) &= \beta\\ \operatorname{otp}(A_3,<_3) &= \gamma\end{aligned}$$

אז הסודר $\alpha+(\beta+\gamma)$, וגם $(\alpha+\beta)+\gamma$ הם טיפוס הסדר של הקבוצה הסדורה היטב $(A_1\cup A_2\cup A_3,<)$, כאשר הסדר $<$ מסדר את הקבוצות אחת מעל השניה.

■

הערה 3.14 $\beta_1<\beta_2$ לא גורר כי $\beta_1+\alpha<\beta_2+\alpha$.
למשל: $2<5$ אבל $2+\omega=5+\omega$.

דוגמה 3.15 עבור סודרים α,β,γ כאשר $\gamma>0$, המשוואה $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ לא גוררת כי $\alpha=\beta$.

למשל:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0\\ \beta &= 1\\ \gamma &= \omega\end{aligned}$$

טענה 3.16 (רציפות החיבור מימין) אם β סודר גבולי, אז $\alpha+\beta=\sup\{\alpha+\gamma\mid\gamma<\beta\}$.

הוכחה: עבור $\gamma<\beta$ מתקיים $\alpha+\gamma<\alpha+\beta$,
כלומר: $\sup\{\alpha+\gamma\mid\gamma<\beta\}\le\alpha+\beta$.
נניח בשלילה כי לא מתקיים שיוויון. נסמן

$$\sup\{\alpha+\gamma\mid\gamma<\beta\}=\delta$$

אז לפי ההנחה $\delta<\alpha+\beta$.
היות ו־$1<\beta$ מתקיים $\alpha<\delta$ ולכן: $\alpha<\delta<\alpha+\beta$.
הסודר δ איזומורפי לרישא של $\alpha+\beta$, וזים קיים $\overline{\gamma}<\beta$: $\alpha+\overline{\gamma}=\delta$.
אבל δ הוא הסופרמום של $\alpha+\gamma$ על פני כל $\gamma<\beta$ ובפרט עבור $\gamma=\overline{\gamma}+1$ ולכן: $\delta>\alpha+\overline{\gamma}$, וקיבלנו סתירה. ■

כפל קס"חים (קנטור, 1883)

בהנתן קבוצות סדורות חלקית $(A,<_A)$, $(B,<_B)$, נגדיר את מכפתלם להיות:

$$(C,<_C):=(A,<_A)\times(B,<_B)$$

כאשר

$$C=\{(a,b)\mid a\in A,\, b\in B\}$$

יחס הסדר מוגדר ע"י:

$$(x,i)<_C(y,j)\iff \begin{array}{l} i<_B j\\ \text{או}\\ (i=j)\;\; x<_A y\end{array}$$

תרגיל 3.17 אם $(A,<_A),(B,<_B)$ סדרים קוויים אז מכפלתם סדר קווי.

טענה 3.18 אם $(A,<_A),(B,<_B)$ סדרים טובים אז מכפלתם סדר טוב.

הוכחה: בהנתן $Z \subseteq C$ לא ריקה, יהי

$$\begin{aligned} b^* &:= \min_{<_B}\{b\in B \mid \exists a\in A\ (a,b)\in Z\} \\ a^* &:= \min_{<_A}\{a\in A \mid (a,b^*)\in Z\} \end{aligned}$$

אז (a^*,b^*) איבר ראשון ב-Z. ■

כפל סודרים

הגדרה 3.19 עבור סודרים α,β נגדיר:

$$\alpha\cdot\beta = \mathrm{otp}\left((\alpha,\in)\times(\beta,\in)\right)$$

טענה 3.20 לכל סודרים α,β,γ, מתקיים

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

הוכחה: ניתן להגדיר איזומורפיזם:

$$\begin{gathered} \pi:(\alpha,\in)\times((\beta,\in)+(\gamma,\in))\to((\alpha,\in)\times(\beta,\in))+((\alpha,\in)\times(\gamma,\in)) \\ (a,(x,i))\mapsto((a,x),i) \end{gathered}$$

■

הערה 3.21 תכונת הדיסטריביוטיביות $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ לא מתקיימת!

למשל, עבור $\alpha=\beta=1$ ו-$\gamma=\omega$:

$$\begin{aligned} (1+1)\cdot\omega &= 2\cdot\omega=\omega \\ 1\cdot\omega+1\cdot\omega &= \omega+\omega \end{aligned}$$

דוגמה 3.22 $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ איננו גורר $\alpha=\beta$. ניקח למשל:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= \omega \end{aligned}$$

תרגיל 3.23 מצאו סודר סודר הכי קטן γ המקיים $\omega+\gamma=\gamma$.

הוכחה: סודר זה הוא $\gamma=\omega\cdot\omega$.

$$\omega+(\omega\cdot\omega)=\omega\cdot(1+\omega)=\omega\cdot\omega$$

למה זה הכי קטן? אם יש קטן יותר מהסודר הנ"ל, אז יש טבעיים n,m כך ש־ $\gamma=\omega\cdot n+m$, ואז זה לא יתקיים:

$$\omega+(\omega\cdot n+m)=\omega\cdot(n+1)+m$$

■

הערה 3.24 איחוד ומכפלה קרטזית של קבוצות בנות מניה ישאיר אותנו עם קבוצה בת מניה. לכן חיבור וכפל סודרים בני מניה הוא שוב סודר בן מניה.

מקצת תכונות של כפל סודרים

1. $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$.
2. $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$.
3. $\alpha\cdot 2=\alpha+\alpha$ (בעוד קיימים סודרים α עבורם $2\cdot\alpha\neq\alpha+\alpha$).
4. $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.
5. אם $\alpha>0$ ו־$\beta_1<\beta_2$, אז $\alpha\cdot\beta_1<\alpha\cdot\beta_2$.
6. נניח $\alpha>0$. אם $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$, אז $\beta=\gamma$. אם $\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$, אז $\beta<\gamma$.

תרגיל 3.25 (רציפות הכפל מימין) אם β סודר גבולי, אז $\alpha\cdot\beta=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma<\beta\}$.