תזכורת:

- אם $(A,<)$ סדורה היטב ו־ $f:A\to A$ העתקה שומרת סדר, אז $f(a)\geq a$ לכל $a\in A$.
- אם $B=b_{\downarrow}=\{a\in A\mid a<b\}$ ריישא ראשית של A אז $(A,<)\ncong(B,<)$. (נובע מהסעיף הקודם)
- סדרים טובים הם צפידים: אם $f:A\to A$ איזומורפיזם שומר סדר של סדר טוב $(A,<)$, אז f העתקת הזהות.
- אם $(B,<_B)$ סדר־איזומורפית לקבוצה סדורה היטב $(A,<_A)$, אז קיים איזומורפיזם יחיד המעיד על כך.

טענה 3.1 אם $\beta\in\alpha$ סודרים, אז β ריישא של $(\alpha,\in)$, ולכן $(\alpha,\in)\ncong(\beta,\in)$.

הוכחה: נתבונן ברישא הנאותה של $(\alpha,\in)$:

$$\beta_{\downarrow}=\{a\in\alpha\mid a<\beta\}=\{a\in\alpha\mid a\in\beta\}$$

כיוון ש־ $\beta\in\alpha$ ו־ α טרנזיטיבית $\beta\subseteq\alpha$, ואז:

$$=\{a\in\beta\mid a\in\beta\}=\beta$$

■

מסקנה 3.2 אם α,β סודרים המקיימים $(\alpha,\in)\cong(\beta,\in)$, אזי $\alpha=\beta$.

הוכחה: בשיעור הקודם ראינו כי $(\mathrm{On},\in)$ סדורה קווית (אפילו היטב). לכן, אם $\beta\neq\alpha$, ניתן בה"כ להניח כי $\beta\in\alpha$. אבל אז נקבל סתירה לטענה הקודמת. ■

משפט 3.3 (קנטור, 1897) נניח $(A,<_A)$ $(B,<_B)$ סדרים טובים. אז בדיוק אחד מהבאים מתקיימים:

1. $(A,<_A)\cong(B,<_B)$.
2. $(B,<_B)$ איזומורפית לריישא ראשית של $(A,<_A)$.
3. $(A,<_A)$ איזומורפית לריישא ראשית של $(B,<_B)$.

והאיזומורפיזם תמיד יחיד (מהצפידות של סדרים טובים).

הוכחה: נסמן

$$f:=\{(a,b)\in A\times B\mid(a_{\downarrow},<_A)\cong(b_{\downarrow},<_B)\}.$$

תת־טענה 1: f פונקציה.

הוכחה: אחרת, קיימים $a\in A$ ו־ $b_1\neq b_2$ ב־ B כך ש־

$$\begin{aligned}(a_{\downarrow},<_A)&\cong(b_{1\downarrow},<_B)\\(a_{\downarrow},<_A)&\cong(b_{2\downarrow},<_B)\end{aligned}$$

בפרט, $(b_{1\downarrow},<_B)\cong(b_{2\downarrow},<_B)$.
בלי הגבלת הכלליות $b_1<_B b_2$. אז קיבלנו כי $(b_{2\downarrow},<_B)$ איזומורפית לריישא ראשית של עצמה. זוהי סתירה.

מש"ל תת־טענה 1☒

תת־טענה 2: f חד־חד־ערכית.

הוכחה: אחרת, באופן דומה לתת־טענה 1, ניתן יהיה למצוא $a_1<_A a_2$ ב־ A כך ש־ $(a_{1\downarrow},<_A)\cong(a_{2\downarrow},<_A)$. זוהי סתירה.

מש"ל תת־טענה 2☒

תת־טענה 3: f שומרת סדר.

הוכחה: נניח $f \ni (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ ו־ $a_1 <_A a_2$. נבקש להראות כי $b_1 <_B b_2$.

כיוון ש־ $a_{1\downarrow}$ ריישא ראשית של $a_{2\downarrow}$, והאחרון איזומורפי ל־ $b_{2\downarrow}$, הרי ש־ $a_{1\downarrow}$ איזומורפי לריישא ראשית של $b_{2\downarrow}$.

כיוון ש־ $a_{1\downarrow}$ איזומורפי ל־ $b_{1\downarrow}$, נסיק סך־הכל כי $b_{1\downarrow}$ איזומורפי לריישא ראשית של $b_{2\downarrow}$.

תהי לכן $b \in b_{2\downarrow}$ כך ש־ $b_\downarrow \cong b_{1\downarrow}$.

אם $b <_B b_1$, הרי ש־ $b_\downarrow$ איזומורפית לריישא ראשית של עצמה (היא $b_{1\downarrow}$).

אם $b_1 <_B b$, הרי ש־ $b_{1\downarrow}$ איזומורפית לריישא ראשית של עצמה (היא $b_\downarrow$).

לכן, האפשרות היחידה היא כי $b = b_1$. בפרט, $b_1 \in b_{2\downarrow}$, ואזי $b_1 <_B b_2$ כמבוקש.

מש"ל תת־טענה 3☒

תת־טענה 4: $\mathrm{dom}(f)$ היא ריישא של $(A, <_A)$.

הוכחה: נניח $a \in \mathrm{dom}(f)$ ו־$a' <_A a$ איבר כלשהו. נבקש להראות כי $a' \in \mathrm{dom}(f)$.

תהי $b \in B$ כך ש־$(a, b) \in f$. כיוון ש־$(a, b) \in f$, יהי $\pi : a_\downarrow \leftrightarrow b_\downarrow$ איזומורפיזם־סדר.

נתבונן ב־ $b' := \pi(a')$. אז בדומה להוכחת תת־טענה 3, $\pi \restriction a'_\downarrow$ מהווה איזומורפיזם־סדר מ־ $a'_\downarrow$ ל־ $b'_\downarrow$, ולכן $(a', b') \in f$. בפרט, $a' \in \mathrm{dom}(f)$.

מש"ל תת־טענה 4☒

תת־טענה 5: $\mathrm{Im}(f)$ ריישא של $(B, <_B)$.

הוכחה: דומה להוכחת תת־טענה 4.

מש"ל תת־טענה 5☒

ננתח כעת את כל הצירופים האפשריים:

1. אם $\mathrm{dom}(f) = A$ ו־ $\mathrm{Im}(f) = B$, אז $(A, <_A) \cong (B, <_B)$.
2. אם $\mathrm{dom}(f) \neq A$ ו־ $\mathrm{Im}(f) = B$, אז מתת־טענה 4, קיים $a \in A$ כך ש־ $\mathrm{dom}(f) = a_\downarrow$, ואז f^{-1} מעידה כי $(B, <_B)$ איזומורפית לריישא של $(A, <_A)$, היא $a_\downarrow$.
3. אם $\mathrm{dom}(f) = A$ ו־ $\mathrm{Im}(f) \neq B$, אז מתת־טענה 5, קיים $b \in B$ כך ש־ $\mathrm{Im}(f) = b_\downarrow$, ואז f מעידה כי $(A, <_A)$ איזומורפית לריישא של $(B, <_B)$, היא $b_\downarrow$.
4. לא ייתכן כי $\mathrm{dom}(f) \neq A$ וגם $\mathrm{Im}(f) \neq B$, שכן אחרת קיימים $a \in A$ ו־$b \in B$ כך ש־ $\mathrm{dom}(f) = a_\downarrow$, ו־$\mathrm{Im}(f) = b_\downarrow$. אבל אז f מעידה כי $(a_\downarrow, <_A) \cong (b_\downarrow, <_B)$ בסתירה לכך ש־ $f \not\ni (a, b)$.

■

תרגיל 3.4 סודר α הוא גבולי אמ"מ $\alpha = \bigcup \alpha$.

הגשמת המספרים הטבעיים

נגדיר:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ n+1 &:= n \cup \{n\} \end{aligned}$$

למשל

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} \cup \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

מדוע אלו סודרים? ההוכחה היא באינדוקציה:

- 0 הוא הקבוצה הריקה, שהיא כמובן סודר.
- אם n סודר, אז מטענה מהרצאה 2, גם $n \cup \{n\}$ סודר.

נסמן:

$$\omega := \{n \mid n \text{ is a natural number}\}.$$

זוהי קבוצה טרנזיטיבית של סודרים, ולכן היא בעצמה סודר!

הבחנה 3.5 סודר α הוא סופי אמ"מ $\alpha \in \omega$.

הוכחה: לפי הגדרה, קבוצה היא סופית אמ"מ קיימת פונקציה חח"ע ממנה למספר טבעי. כל איבר של ω הוא מספר טבעי ולכן סופי. בכיוון ההפוך: נניח α סודר ו-$\alpha \notin \omega$. כיוון שכל שני סודרים ברי השוואה, נקבל $\omega \leq \alpha$. אבל אז $\omega \subseteq \alpha$, ואין פונקציה ממספר טבעי על ω. ■

הערה 3.6 במקרה הסופי, העוצמה של הסודר שווה לסודר עצמו.

הגדרה 3.7 סודר α נקרא סודר עוקב אמ"מ קיים סודר β כך ש- $\alpha = \beta + 1$. אחרת α נקרא סודר גבולי.

דוגמאות: 3 סודר עוקב.

0 סודר גבולי.

ω סודר גבולי.

$\omega + 1$ סודר עוקב.

תרגיל 3.8 סודר α הוא עוקב אמ"מ קיים $\max(\alpha, \in)$. סודר α הוא גבולי אמ"מ $\alpha = \bigcup \alpha$.

משפט 3.9 (Mirimanoff, 1917) לכל קבוצה סדורה היטב $(A, <)$ קיים (ביחידות) סודר α כך ש-

$$(A, <) \cong (\alpha, \in).$$

הוכחה: נתבונן ב-

$$f := \{(a, \beta) \mid a \in A,\ \beta \text{ ordinal},\ (\beta, \in) \cong (a_\downarrow, <)\}.$$

נימוקים דומים לאלו שראינו היום מבססים כי f היא פונקציה חד-חד-ערכית ושומרת סדר.

שימו לב כי $\mathrm{Im}(f)$ היא קבוצה טרנזיטיבית של סודרים (כמו תת-טענה 5) ולכן קיים סודר α עבורו $\mathrm{Im}(f) = \alpha$.

אם $\mathrm{dom}(f) \neq A$ אז קיים $a \in A$ כך ש- $\mathrm{dom}(f) = a_\downarrow$ (כמו בתת-טענה 4), אבל אז: $\alpha \cong a_\downarrow$, כלומר $(a, \alpha) \in f$. בסתירה לכך ש- $a \notin f$.

לכן, $\mathrm{dom}(f) = A$, ואז f מהווה איזומורפיזם מ-A כולה לסודר כלשהו, הוא α. ■

הגדרה 3.10 לכל קבוצה סדורה היטב $(A, <)$, נסמן את טיפוס הסדר של הקבוצה בסימון $\mathrm{otp}(A, <)$. זהו הסודר היחיד α כך ש- $(\alpha, \in) \cong (A, <)$. (הנציג הקנוני של הסדר הטוב).

אריתמטיקה של סודרים

חיבור קס"חים (קנטור, 1883)

בהנתן קבוצות סדורות חלקית $(A,<_A)$, $(B,<_B)$, נגדיר את חיבורם להיות קס"ח:

$$(C,<_C) := (A,<_A) + (B,<_B)$$

באופן הבא:

$$\begin{aligned} C &:= (A\times\{0\}) \uplus (B\times\{1\}) \\ &= \{(a,0),(b,1) \mid a\in A, b\in B\} \end{aligned}$$

יחס הסדר מוגדר על־ידי:

$$(x,i) <_C (y,j) \iff \begin{array}{l} i<j \\ \text{או} \\ i=j=0 \ \wedge\ x<_A y \\ \text{או} \\ i=j=1 \ \wedge\ x<_B y \end{array}$$

הערה 3.11 אם הסדרים $<_A, <_B$ סדרים קוויים אז גם $<_C$ כזה. אם הם סדרים טובים אז גם $<_C$ כזה.

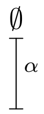
חיבור סודרים

הגדרה 3.12 עבור סודרים α,β נגדיר:

$$\alpha+\beta := \operatorname{otp}\left((\alpha,\in)+(\beta,\in)\right)$$

הערה 3.13 ראינו בעבר את ההגדרה $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$.
שזה הקבוצה α ומוסיפים מעליה את α כאיבר מקסימלי:

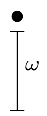
בהגדרה שראינו עכשיו, $\alpha+1$ הוא הקבוצה α ומוסיפים מעליה את $\emptyset$ כאיבר מקסימלי:



ניתן לראות כי אלו סדרים איזומורפיים, ולכן שתי ההגדרות מתלכדות.

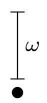
הערה 3.14 חיבור סודרים היא לא פעולה חילופית!
עבור המקרה הסופי היא כן חילופית כי הסכום עבור הסודרים הסופיים מתלכד עם סכום רגיל של המספרים הטבעיים.
עבור המקרה האינסופי:

יש איבר אחרון



$\omega+1>\omega$

אין איבר אחרון



$1+\omega=\omega$

מקצת תכונות של חיבור סודרים

1. $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$.
2. אם $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2$, אז $\beta_1 = \beta_2$.
3. אם $\beta_1 < \beta_2$ אז $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$.
4. אסוציאטיביות: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

הוכחה: נוכיח את התכונות:

1. ברור.
2. ניקח פונקציה $\pi : \alpha + \beta_1 \to \alpha + \beta_2$ המהווה איזומורפיזם סדר מ-$(\alpha+\beta_1, \in)$ ל-$(\alpha+\beta_2, \in)$. הצמצום $\pi \restriction \alpha$ מהווה איזומורפיזם סדר מ-$(\alpha, \in)$ לרישא של $(\alpha + \beta_2, \in)$, ולכן $\gamma := \mathrm{Im}(\pi \restriction \alpha)$ הוא סודר.[1] אז π מעיד כי $(\alpha, \in) \cong (\gamma, \in)$, ואזי, ממסקנה 3.2, $\gamma = \alpha$.

   התקבל כי $\pi \restriction \alpha$ העתקה מ-α ל-α, ומכאן כי הצמצום של π על מה שנותר לאחר הסרת α הוא איזומורפיזם מהעותק של β_1 לעותק של β_2.
3. כי $\alpha + \beta_1$ איזומורפי לרישא של $\alpha + \beta_2$.
4. אם נקח $(A_i, <_i)$ קבוצות סדורות היטב כאשר מתקיים:

$$\begin{aligned} \mathrm{otp}(A_1, <_1) &= \alpha \\ \mathrm{otp}(A_2, <_2) &= \beta \\ \mathrm{otp}(A_3, <_3) &= \gamma \end{aligned}$$

   אז הסודר $\alpha + (\beta + \gamma)$, וגם $(\alpha + \beta) + \gamma$ הם טיפוס הסדר של הקבוצה הסדורה היטב $(A_1 \cup A_2 \cup A_3, <)$, כאשר הסדר $<$ מסדר את הקבוצות אחת מעל השניה.

■

הערה 3.15 $\beta_1 < \beta_2$ לא גורר כי $\beta_1 + \alpha < \beta_2 + \alpha$.
למשל: $2 < 5$ אבל $5 + \omega = 2 + \omega$.

דוגמה 3.16 עבור סודרים α, β, γ כאשר $\gamma > 0$, המשוואה $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ לא גוררת כי $\alpha = \beta$.

למשל:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= \omega \end{aligned}$$

טענה 3.17 (רציפות החיבור מימין) אם β סודר גבולי גדול מ-0, אז $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$.

הוכחה: עבור $\gamma < \beta$ מתקיים $\alpha + \gamma < \alpha + \beta$. מכאן כי $\sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\} \leq \alpha + \beta$.
נניח בשלילה כי לא מתקיים שיוויון, כלומר, נניח כי

$$\delta := \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$$

מקיים $\delta < \alpha + \beta$.
היות ו-$1 < \beta$, מתקיים $\alpha < \delta$. סה"כ: $\alpha < \delta < \alpha + \beta$.
נגדיר $\bar{\gamma} := \mathrm{otp}(\delta \setminus \alpha, \in)$. אז $\alpha + \bar{\gamma} = \delta$ ו-$0 < \bar{\gamma} < \beta$.
יהי $\gamma := \bar{\gamma} + 1$. כיוון ש-$\bar{\gamma} < \beta$ ו-β גבולי, נקבל כי $\gamma < \beta$.
מהגדרת δ נובע כעת כי $\delta \geq \alpha + \gamma > \alpha + \bar{\gamma}$, בסתירה לבחירת $\bar{\gamma}$ כך ש-$\delta = \alpha + \bar{\gamma}$. ■

[1] קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.

כפל קס"חים (קנטור, 1883)

בהנתן קבוצות סדורות חלקית $(A,<_A)$, $(B,<_B)$, נגדיר את מכפלתם להיות:

$$(C,<_C) := (A,<_A) \times (B,<_B)$$

כאשר

$$C =: \{(a,b) \mid a \in A,\, b \in B\}$$

יחס הסדר מוגדר באופן מילוני עברי:

$$(x,i) <_C (y,j) \iff \begin{array}{l} i <_B j \\ \text{או} \\ (i=j) \;\wedge\; x <_A y \end{array}$$

תרגיל 3.18 אם $(A,<_A),(B,<_B)$ סדרים קוויים אז מכפלתם סדר קווי.

טענה 3.19 אם $(A,<_A),(B,<_B)$ סדרים טובים אז מכפלתם סדר טוב.

הוכחה: בהנתן $Z \subseteq C$ לא ריקה, יהי

$$\begin{aligned} b^* &:= \min_{<_B}\{b \in B \mid \exists a \in A\,(a,b) \in Z\} \\ a^* &:= \min_{<_A}\{a \in A \mid (a,b^*) \in Z\} \end{aligned}$$

אז (a^*,b^*) איבר ראשון ב־Z. ■

כפל סודרים

הגדרה 3.20 עבור סודרים α,β נגדיר:

$$\alpha \cdot \beta := \operatorname{otp}((\alpha,\in) \times (\beta,\in))$$

טענה 3.21 לכל סודרים α,β,γ, מתקיים

$$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$$

הוכחה: נגדיר איזומורפיזם

$$\pi : (\alpha,\in) \times ((\beta,\in)+(\gamma,\in)) \to ((\alpha,\in)\times(\beta,\in)) + ((\alpha,\in)\times(\gamma,\in))$$

ע"י הכלל:

$$\pi(a,(x,i)) := ((a,x),i).$$

■

הערה 3.22 תכונת הדיסטריביוטיביות $(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ לא מתקיימת!

למשל, עבור $\alpha=\beta=1$ ו־$\gamma=\omega$:

$$\begin{aligned} (1+1)\cdot\omega &= 2\cdot\omega = \omega \\ 1\cdot\omega + 1\cdot\omega &= \omega+\omega \end{aligned}$$

דוגמה 3.23 $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ איננו גורר $\alpha = \beta$. ניקח למשל:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= \omega \end{aligned}$$

תרגיל 3.24 מצאו את סודר הקטן ביותר γ המקיים $\omega + \gamma = \gamma$.

הוכחה: סודר זה הוא $\gamma = \omega \cdot \omega$.

$$\omega + (\omega \cdot \omega) = \omega \cdot (1 + \omega) = \omega \cdot \omega$$

למה זה הכי קטן?

אם יש קטן ממנו, אז קיימים טבעיים n, m כך ש- $\gamma = \omega \cdot n + m$, ואז זה לא יתקיים:

$$\omega + (\omega \cdot n + m) = \omega \cdot (n + 1) + m$$

■

הערה 3.25 איחוד ומכפלה קרטזית של קבוצות בנות מניה ישאיר אותנו עם קבוצה בת מניה. לכן חיבור וכפל סודרים בני מניה הוא שוב סודר בן מניה.

מקצת תכונות של כפל סודרים

1. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.
2. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
3. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$ (בעוד קיימים סודרים α עבורם $2 \cdot \alpha \neq \alpha + \alpha$).
4. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
5. אם $\alpha > 0$ ו-$\beta_1 < \beta_2$, אז $\alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2$.
6. נניח $\alpha > 0$. אם $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, אז $\beta = \gamma$. אם $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$, אז $\beta < \gamma$.

תרגיל 3.26 (רציפות הכפל מימין) אם β סודר גבולי גדול מ-0, אז $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}$.