משפט 4.1 אינדוקציה טרנספיניטית

<u>נניח</u> $\varphi(x)$ טענה אודות משתנה x המקיימת לכל סודר α:

אם $\varphi(\beta)$ מתקיים לכל סודר $\beta < \alpha$, **אז** גם $\varphi(\alpha)$ מתקיים.

<u>אז</u> $\varphi(\alpha)$ מתקיים לכל סודר α.

הוכחה: נניח אחרת, ויהי α הסודר הקטן ביותר כך ש- $\varphi(\alpha)$ לא מתקיים.

ממינימליות α נובע כי $\varphi(\beta)$ מתקיים לכל $\beta < \alpha$,

אבל אז מההנחה נובע כי $\varphi(\alpha)$ גם כן מתקיים, בסתירה לבחירת α. ■

העקרון הנ"ל דומה ברוחו לעקרון אינדוקציה שלמה על המספרים הטבעיים. נציג כעת עקרון הדומה יותר לעקרון אינדוקציה הרגיל על המספרים הטבעיים:

נוסח חלופי: <u>נניח</u> $\varphi(x)$ טענה אודות משתנה x, המקיימת:

1. $\varphi(0)$ מתקיים.
2. אם α סודר ו- $\varphi(\alpha)$ מתקיים, אז גם $\varphi(\alpha+1)$ מתקיים.
3. אם α סודר גבולי גדול מ-0, ו- $\varphi(\beta)$ מתקיים לכל סודר $\beta < \alpha$, אז גם $\varphi(\alpha)$ מתקיים.

<u>אז</u> $\varphi(\alpha)$ מתקיים לכל סודר α.

דוגמא: נוכיח כי $\alpha \leq \beta + \alpha$ לכל סודרים α, β.

הוכחה: נקבע סודר שרירותי β, ונוכיח את הטענה באינדוקציה על α.

<u>בסיס האינדוקציה $\alpha = 0$:</u>

אכן $0 \leq \beta + 0$.

<u>צעד האינדוקציה העוקב:</u>

נניח α סודר המקיים $\alpha \leq \beta + \alpha$. נבקש להראות כי $\alpha + 1 \leq \beta + (\alpha + 1)$.

ואכן,

$$\alpha + 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha \leq \beta + \alpha}}{\leq} (\beta + \alpha) + 1 = \beta + (\alpha + 1).$$

<u>צעד האינדוקציה הגבולי:</u>

נניח α סודר גבולי גדול מ-0, ולכל סודר $\alpha' < \alpha$ מתקיים $\alpha' \leq \beta + \alpha'$. נבקש להראות כי $\alpha \leq \beta + \alpha$.

נניח אחרת, כלומר כי $\alpha > \beta + \alpha$.

נסמן $\alpha' := \beta + \alpha$. אז כיוון ש-$\alpha' < \alpha$ ו-α גבולי, גם $\alpha' + 1 < \alpha$. ומכאן:

$$\beta + \alpha = \alpha' < \alpha' + 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha' + 1 < \alpha}}{\leq} \beta + (\alpha' + 1).$$

קיבלנו כי $\beta + \alpha < \beta + (\alpha' + 1)$, ואז מטענה מהרצאה 3 נקבל כי $\alpha < \alpha' + 1$. זוהי סתירה. ■

תרגיל 4.2 אם $\alpha \leq \beta$ סודרים, אז קיים סודר δ כך ש- $\beta = \alpha + \delta$.[1]

[1] כמובן ש-δ נקבע ביחידות. כלומר, אם $\alpha \leq \beta$, אז קיים ויחיד סודר $\beta - \alpha$.

טענה 4.3 לכל סודר α ולכל תת־קבוצה $A \subseteq \alpha$ מתקיים, $\mathrm{otp}(A, \in) \leq \alpha$.

הוכחה: נזכיר כיצד מחשבים את $\mathrm{otp}(A, <_A)$ עבור קבוצה סדורה היטב $(A, <_A)$ כלשהי. מתבוננים בקבוצה

$$f_A := \{(a, \tau) \mid a \in A \ \&\ \tau \text{ סודר } \&\ (\{b \in A \mid\ b <_A a\}, <_A) \cong (\tau, \in)\}.$$

אז f_A העתקה חד־חד־ערכית, שומרת סדר מ־ $(A, <_A)$ על סודר כלשהו - נסמנו δ_A - הוא $\mathrm{otp}(A, <_A)$.

בטענה זו נתעניין במקרה המיוחד בו $<_A$ הוא פשוט $\in$.

נוכיח כי לכל סודר α, ולכל תת־קבוצה $A \subseteq \alpha$, מתקיים $\delta_A \leq \alpha$. באינדוקציה על α:

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

עבור $\alpha = 0$ מתקיים לכל $A \subseteq \alpha$ כי $A = \emptyset$ ולכן $\delta_A = 0 = \alpha$.

<u>צעד האינדוקציה העוקב:</u>

נניח α סודר, ולכל $A \subseteq \alpha$, מתקיים $\delta_A \leq \alpha$.

תהי A תת־קבוצה שרירותית של $\alpha + 1$. נבקש להראות כי $\delta_A \leq \alpha + 1$.

נפריד לשני מקרים:

- אם $\alpha \notin A$, אז $A = A \cap \alpha$ ו־

$$\delta_A = \delta_{(A\cap\alpha)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{הנחה}}}{\leq} \alpha < \alpha + 1.$$

- אם $\alpha \in A$, אז $A = (A \cap \alpha) \uplus \{\alpha\}$ ו־

$$f_A = f_{A\cap\alpha} \cup \{(\alpha, \delta_{A\cap\alpha})\}.$$

כלומר,

$$\delta_A = \delta_{(A\cap\alpha)} + 1 \leq \alpha + 1.$$

<u>שלב גבולי:</u>

נניח α גבולי גדול מ־0, ולכל $\alpha' < \alpha$ וכל $A \subseteq \alpha'$, מתקיים $\delta_A \leq \alpha'$.

נניח כעת $A \subseteq \alpha$, ונבקש להראות כי $\delta_A \leq \alpha$.

מההנחה, לכל $\alpha' < \alpha$ מתקיים:

$$\delta_{A\cap\alpha'} \leq \alpha' < \alpha.$$

כיוון ש־ f_A נקבעת מקומית על־פי רישות של A, הרי ש־ $f_A = \bigcup_{\alpha'<\alpha} f_{(A\cap\alpha')}$.

לכל $\alpha' < \alpha$, מתקיים $\mathrm{Im}(f_{A\cap\alpha'}) = \delta_{A\cap\alpha'} \leq \alpha' < \alpha$.

מכאן כי

$$\delta_A = \mathrm{Im}(f_A) = \bigcup_{\alpha'<\alpha} \mathrm{Im}(f_{(A\cap\alpha')}) = \sup_{\alpha'<\alpha} \delta_{A\cap\alpha'} \leq \sup_{\alpha'<\alpha} \alpha' = \alpha.$$

סה"כ $\delta_A \leq \alpha$. ■

מסקנה 4.4 נניח $(A, <_A)$ ו־ $(B, <_B)$ סדרים טובים, ו־ $\pi : A \to B$ היא העתקה חד־חד־ערכית שומרת סדר.

אז $\mathrm{otp}(A, <_A) \leq \mathrm{otp}(B, <_B)$.

הוכחה: יהי $\delta := \operatorname{otp}(B,<_B)$. נבקש להראות כי $\operatorname{otp}(A,<_A) \leq \delta$.

יהי $f_B : B \leftrightarrow \delta$ איזומורפיזם סדר מ־$(B,<_B)$ ל־$(\delta,\in)$. נסמן

$$\overline{A} := \operatorname{Im}(f_B \circ \pi).$$

אז $\operatorname{otp}(A,<_A) = \operatorname{otp}(\overline{A},\in)$ ו־$\overline{A} \subseteq \delta$. סך הכל:

$$\delta = \operatorname{otp}(B,<_B) \underset{\text{טענה קודמת}}{\leq} \operatorname{otp}(\overline{A},\in) = \operatorname{otp}(A,<_A).$$

■

מסקנה 4.5 לכל סודרים α,β,γ מתקיים:

$$\alpha+\gamma \leq \alpha+\beta+\gamma.$$

הוכחה: קל להגדיר העתקה חח"ע שומרת סדר מ־$(\alpha,\in)+(\gamma,\in)$ ל־$((\alpha,\in)+(\beta,\in))+(\gamma,\in)$.

לכן, ממסקנה 4.4, $\alpha+\beta+\gamma \leq \alpha+\gamma$. ■

מסקנה 4.6 אם $\begin{matrix}\alpha_1 \leq \alpha_2 \\ \beta_1 \leq \beta_2\end{matrix}$ סודרים, אז $\alpha_1+\beta_1 \leq \alpha_2+\beta_2$.

הוכחה: קל להגדיר העתקה חח"ע שומרת סדר מ־$(\alpha_1,\in)+(\beta_1,\in)$ ל־$(\alpha_2,\in)+(\beta_2,\in)$.

לכן, ממסקנה 4.4, $\alpha_1+\beta_1 \leq \alpha_2+\beta_2$. ■

מסקנה 4.7 אם $\begin{matrix}\alpha_1 \leq \alpha_2 \\ \beta_1 \leq \beta_2\end{matrix}$ סודרים, אז $\alpha_1\cdot\beta_1 \leq \alpha_2\cdot\beta_2$.

הוכחה: כזכור:

$$\begin{array}{c}\alpha\cdot\beta = \operatorname{otp}((\alpha,\in)\times(\beta,\in)) \\ \| \\ (C,<_C) \\ \| \\ C = \{(a,b) \mid a\in\alpha,\ b\in\beta\}\end{array}$$

ו־ $(a,b) <_C (a',b') \iff b <_B b'$ או ($b=b'$ ו־ $a <_A a'$).

לכן העתקת הזהות היא העתקה חח"ע שומרת סדר מ־$(\alpha_1,\in)\times(\beta_1,\in)$ ל־$(\alpha_2,\in)\times(\beta_2,\in)$.

לכן, ממסקנה 4.4, $\alpha_1\cdot\beta_1 \leq \alpha_2\cdot\beta_2$. ■

חזקות סודרים

נניח α סודר ו־B קבוצה של סודרים. לפונקציה $f : B \to \alpha$ נגדיר את התומך של f:

$$\operatorname{supp}(f) := \{\delta\in B \mid f(\delta)\neq 0\}.$$

נגדיר

$$E(B,\alpha) := \{f : B\to\alpha \mid \operatorname{supp}(f) \text{ סופית}\}.$$

שימו לב כי במקרה הפרטי בו B סופית, מתקיים $E(B,\alpha) = {}^B\alpha$. כלומר:

$$E(B,\alpha) = \{f \mid f \text{ is a function from } B \text{ to } \alpha\}.$$

כמו־כן, אם B אינסופית ו־$0<\alpha$, אז $E(B,\alpha)\neq {}^B\alpha$.

טענה 4.8 אם α, β סודרים בני־מניה, אז $E(\beta, \alpha)$ בת־מניה.

הוכחה: לכל תת־קבוצה $B \subseteq \beta$, נגדיר את ההרמה של $E(B, \alpha)$ לתוך $E(\beta, \alpha)$:

$$E^B(\beta, \alpha) := \{f \in E(\beta, \alpha) \mid \text{supp}(f) \subseteq B\}.$$

כלומר, לוקחים פונקציות מ־$E(B, \alpha)$ ומרחיבים את תחום ההגדרה שלהן לכל β באמצעות הפעולה של "ריפוד באפסים". כיוון ש־α סודר בן־מניה ו־B סופית, מתקיים $|E^B(\beta, \alpha)| = |E(B, \alpha)| = |{}^B\alpha| \leq \aleph_0$.

תהי $\mathcal{P}$ קבוצת כל התת־קבוצות $B \subseteq \beta$ כך ש־B סופית. כיוון ש־β בן־מניה, $\mathcal{P}$ בת־מניה.

אז מתקבל ש־$E(\beta, \alpha)$ הוא איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה: $E(\beta, \alpha) = \bigcup\{E^B(\beta, \alpha) \mid B \in \mathcal{P}\}$ וסיימנו. ■

נסדר את $E(\beta, \alpha)$ בסדר מילוני עברי $<_E$, כדלקמן. בהנתן פונקציות f, g **שונות** עם תומך סופי, נסמן

$$\Gamma(f, g) := \max \underbrace{\{\delta < \beta \mid f(\delta) \neq g(\delta)\}}_{\text{קבוצה סופית}}.$$

(שימו לב כי הקבוצה מימין אכן סופית, שכן היא מוכלת ב־$\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$.)

כעת, אם $f(\Gamma(f, g)) < g(\Gamma(f, g))$ נגדיר $f <_E g$, אחרת $g <_E f$.

אפשר להוכיח כי היחס $<_E$ הוא סדר טוב ע"י רשימה ארוכה של בדיקות. במקום זאת, נראה כי $(E(\beta, \alpha), <_E)$ איזומורפית־סדר לקבוצה סדורה היטב:

טענה 4.9 לכל סודרים α, β , $(E(\beta, \alpha), <_E)$ סדר טוב ו־

1. $\text{otp}(E(0, \alpha), <_E) = 1$.
2. $\text{otp}(E(\beta + 1, \alpha), <_E) = \text{otp}(E(\beta, \alpha), <_E) \cdot \alpha$.
3. אם β גבולי, אז מתקיימת רציפות:

$$\text{otp}(E(\beta, \alpha), <_E) = \bigcup_{\gamma < \beta} \text{otp}(E(\gamma, \alpha), <_E).$$

הוכחה: נקבע α שרירותי, ונוכיח באינדוקציה על β.

1. בסיס האינדוקציה. היות ו־

$$E(0, \alpha) = \{f : 0 \to \alpha \mid \text{סופית } \text{supp}(f)\} = \{\emptyset\},$$

נסיק כי

$$\text{otp}(E(0, \alpha), <_E) = \text{otp}(\{\emptyset\}, <_E) = 1.$$

בפרט הנ"ל סדורה היטב.

2. צעד האינדוקציה העוקב. נניח β סודר, ו־ $(E(\beta, \alpha), <_E)$ סדר טוב.
נגדיר $\pi : E(\beta + 1, \alpha) \to E(\beta, \alpha) \times \alpha$ כך שלכל $f : \beta + 1 \to \alpha$ בתחום ההגדרה:

$$\pi(f) := (f \restriction \beta, f(\beta)).$$

π חד־חד־ערכית ועל (לא איבדנו אינפורמציה בפירוק הזה).

יתר על כן, π שומרת סדר מ־ $(E(\beta + 1, \alpha), <_E)$ ל־ $(C, <_C) = (E(\beta, \alpha), <_E) \times (\alpha, \in)$, שכן, עבור פונקציות $f <_E g$:

- אם $f(\beta) < g(\beta)$, אז $\pi(f) <_C \pi(g)$.
- אם $f(\beta) = g(\beta)$, אז $f \restriction \beta <_E g \restriction \beta$, ושוב, מהגדרת $<_C$: $\pi(f) <_C \pi(g)$.

אותם שיקולים מראים כי π^{-1} שומרת סדר בכיוון השני. סך־הכל

$$\operatorname{otp}(E(\beta+1,\alpha),<_E) = \operatorname{otp}(E(\beta,\alpha),<_E)\cdot\alpha \, .$$

3. צעד האינדוקציה הגבולי. נניח β גבולי גדול מ־0 ולכל $\gamma<\beta$ מתקיים כי $(E(\gamma,\alpha),<_E)$ סדר טוב.
יהי $\gamma<\beta$ שרירותי. נסמן $\delta_\gamma := \operatorname{otp}(E(\gamma,\alpha),<_E)$. אז

$$\pi_\gamma := \{(f,\tau) \mid f\in E(\gamma,\alpha) \ \&\ \operatorname{otp}(\{g\in E(\gamma,\alpha) \mid g<_E f\},<_E)=\tau\}$$

הוא איזומורפיזם־סדר מ־$(E(\gamma,\alpha),<_E)$ ל־$(\delta_\gamma,\in)$.
נתבונן בהרמה של $E(\gamma,\alpha)$ לתוך $E(\beta,\alpha)$:

$$E^\gamma(\beta,\alpha)=\left\{f\in E(\beta,\alpha) \mid \gamma\le\gamma'<\beta\to f(\gamma')=0\right\}.$$

אז $(E^\gamma(\beta,\alpha),<_E)$ איזומורפי־סדר ל־$(E(\gamma,\alpha),<_E)$. יתר על כן, לכל $f\in E^\gamma(\beta,\alpha)$ מתקיים:

$$\{g\in E^\gamma(\beta,\alpha) \mid g<_E f\}=\{g\in E(\beta,\alpha) \mid g<_E f\}.$$

לכן:

$$\Pi_\gamma := \{(f,\tau) \mid f\in E^\gamma(\beta,\alpha) \ \&\ \operatorname{otp}(\{g\in E^\gamma(\beta,\alpha) \mid g<_E f\},<_E)=\tau\}$$

הוא איזומורפיזם סדר מריישא של $(E(\beta,\alpha),<_E)$ ל־ δ_γ.
לכל $\gamma<\gamma'<\beta$, מתקיים $E^{\gamma'}(\beta,\alpha)\supseteq E^\gamma(\beta,\alpha)$ ו־$\Pi_{\gamma'}\supseteq\Pi_\gamma$. לכן

$$\Pi := \bigcup_{\gamma<\beta}\Pi_\gamma$$

הוא איזומורפיזם שומר סדר מ־ $(E(\beta,\alpha),<_E)$ ל־ $(\bigcup_{\gamma<\beta}\delta_\gamma,\in)$.

■

הגדרה 4.10 עבור סודרים α,β, נגדיר

$$\alpha^\beta := \operatorname{otp}(E(\beta,\alpha),<_E).$$

אז ראינו:

1. $\alpha^0=1$.
2. $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$.
3. (רציפות) אם β גבולי, אז $\alpha^\beta=\sup_{\gamma<\beta}(\alpha^\gamma)$.

תרגיל: בהנתן סודרים α,β,γ הציגו איזומורפיזם שומר סדר מ־ $(E(\beta+\gamma,\alpha),<_E)$ לקבוצה הסדורה $(E(\gamma,\alpha),<_E)\times(E(\beta,\alpha),<_E)$, והסיקו כי $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$.

תרגיל: בהנתן סודרים α,β,γ הציגו קבוצות סדורות $(P,<_P),(Q,<_Q)$ המקיימות $((\alpha^\beta)^\gamma,\in)\cong(P,<_P)\cong(Q,<_Q)\cong(\alpha^{\beta\cdot\gamma},\in)$.