משפט 4.1 אינדוקציה טרנספיניטית

<u>נניח</u> $\varphi(x)$ טענה (אודות משתנה x) המקיימת לכל סודר α:

אם $\varphi(\beta)$ מתקיים לכל סודר $\beta < \alpha$, **אז** גם $\varphi(\alpha)$ מתקיים.

<u>אז</u> $\varphi(\alpha)$ מתקיים לכל סודר α.

הוכחה: נניח אחרת, ויהי α הסודר הקטן ביותר כך ש- $\varphi(\alpha)$ לא מתקיים.

ממינימליות α נובע כי $\varphi(\beta)$ מתקיים לכל $\beta < \alpha$,

אבל אז מההנחה נובע כי $\varphi(\alpha)$ גם כן מתקיים. בסתירה לבחירת α. ■

נוסח חלופי: <u>נניח</u> $\varphi(x)$ טענה אודות משתנה x, המקיימת:

1. $\varphi(0)$ מתקיים.
2. אם α סודר ו- $\varphi(\alpha)$ מתקיים, אז גם $\varphi(\alpha+1)$ מתקיים.
3. אם α סודר גבולי (גדול מ-0), ו- $\varphi(\beta)$ מתקיים לכל סודר $\beta < \alpha$, אז גם $\varphi(\alpha)$ מתקיים.

<u>אז</u> $\varphi(\alpha)$ מתקיים לכל סודר α.

דוגמא: נוכיח כי $\alpha \le \beta + \alpha$ לכל סודרים α, β.

הוכחה: נקבע סודר β, ונוכיח את הטענה באינדוקציה על α.

<u>בסיס האינדוקציה $\alpha = 0$:</u>

אכן $0 \le \beta + 0$.

<u>צעד האינדוקציה העוקב:</u>

נניח α סודר המקיים $\alpha \le \beta + \alpha$. נבקש להראות כי $\alpha + 1 \le \beta + (\alpha + 1)$.

ואכן,

$$\alpha + 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha \le \beta + \alpha}}{\le} (\beta + \alpha) + 1 = \beta + (\alpha + 1)$$

<u>צעד האינדוקציה הגבולי:</u>

נניח α סודר גבולי גדול מ-0, ולכל סודר $\alpha' < \alpha$ מתקיים $\alpha' \le \beta + \alpha'$. נבקש להראות כי $\alpha \le \beta + \alpha$.

נניח אחרת, כלומר כי $\alpha > \beta + \alpha$.

נסמן $\alpha' := \beta + \alpha$. אז כיוון ש- $\alpha' < \alpha$ ו- α גבולי, גם $\alpha' + 1 < \alpha$. ומכאן:

$$\beta + \alpha = \alpha' < \alpha' + 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha' + 1 < \alpha}}{\le} \beta + (\alpha' + 1)$$

קיבלנו כי $\beta + \alpha < \beta + (\alpha' + 1)$, ואז מטענה מהרצאה 3 נקבל כי $\alpha < \alpha' + 1$. סתירה. ■

טענה 4.2 אם $\alpha \le \beta$ סודרים, אז קיים סודר δ כך ש- $\beta = \alpha + \delta$.[1]

[1] כמובן ש-δ נקבע ביחידות. כלומר, אם $\alpha \le \beta$, אז קיים ויחיד סודר $\beta - \alpha$.

הוכחה: נקבע α ונוכיח באינדוקציה על β.

בסיס האינדוקציה:

אם $\alpha = \beta$, פשוט ניקח $\delta := 0$.

שלב עוקב:

נניח $\alpha \leq \beta$ ו־$\beta = \alpha + \delta$ עבור סודר כלשהו δ. נבקש למצוא δ' כך ש־$\beta + 1 = \alpha + \delta'$.

כמובן ש־$\delta' := \delta + 1$ כמבוקש.

שלב גבולי:

נניח β גבולי, $\beta > \alpha$, ולכל $\beta' < \beta$ כך ש־$\alpha \leq \beta'$ קיים $\delta(\beta')$ עבורו $\beta' = \alpha + \delta(\beta')$.

נסמן $\delta := \sup_{\alpha \leq \beta' < \beta} \delta(\beta')$. אז $\beta = \sup_{\alpha\leq\beta'<\beta} \beta' = \sup_{\alpha\leq\beta'<\beta} \alpha + \delta(\beta') = \alpha + \delta$.[2] ∎

טענה 4.3 לכל סודר α ולכל תת־קבוצה $A \subseteq \alpha$ מתקיים, $\mathrm{otp}(A, \in) \leq \alpha$.

הוכחה: נזכיר כיצד מחשבים את $\mathrm{otp}(A, <_A)$ עבור קבוצה סדורה היטב $(A, <_A)$ כלשהי. מתבוננים בקבוצה

$$f_A = \{(a, \tau) \mid a \in A \ \&\ \tau \text{ סודר } \ \&\ (\{b \in A \mid \ b <_A a\}, <_A) \cong (\tau, \in)\}$$

אז f_A העתקה חד־חד־ערכית, שומרת סדר מ־ $(A, <_A)$ על סודר כלשהו - נסמנו δ_A - הוא $\mathrm{otp}(A, <_A)$.

בטענה זו נתעניין במקרה המיוחד בו $<_A$ הוא פשוט $\in$.

נוכיח באינדוקציה על α, כי לכל סודר α, ולכל תת־קבוצה $A \subseteq \alpha$, מתקיים $\delta_A \leq \alpha$.

בסיס האינדוקציה:

עבור $\alpha = 0$ מתקיים לכל $A \subseteq \alpha$ כי $A = \emptyset$ ולכן $\delta_A = 0 = \alpha$.

צעד האינדוקציה:

נניח α סודר, ולכל $A \subseteq \alpha$, מתקיים $\delta_A \leq \alpha$.

תהי A תת־קבוצה של $\alpha + 1$. נבקש להראות כי $\delta_A \leq \alpha + 1$.

נפריד לשני מקרים:

1. אם $A \notin \alpha$, אז $A = A \cap \alpha$ ו־

$$\delta_A = \delta_{(A\cap\alpha)} \underset{\text{הנחה}}{\underset{\downarrow}{\leq}} \alpha < \alpha + 1$$

2. אם $A \in \alpha$, אז $A = (A \cap \alpha) \uplus \{\alpha\}$ ו־

$$f_A = f_{A\cap\alpha} \cup \{(\alpha, \delta_{A\cap\alpha})\}$$

כלומר,

$$\delta_A = \delta_{(A\cap\alpha)} + 1 \leq \alpha + 1$$

שלב גבולי:

נניח α גבולי, ולכל $\alpha' < \alpha$ וכל $A \subseteq \alpha'$, מתקיים $\delta_A \leq \alpha'$.

נניח כעת $A \subseteq \alpha$, ונבקש להראות כי $\delta_A \leq \alpha$.

מההנחה, לכל $\alpha' < \alpha$ מתקיים:

$$\delta_{A\cap\alpha'} \leq \alpha' < \alpha$$

[2] כזכור, סודר β הוא גבולי אמ"מ $\beta = \sup(\beta)$ אמ"מ לכל $\alpha < \beta$ מתקיים $\beta = \sup_{\alpha\leq\beta'<\beta} \beta'$.

כיוון ש־ f_A נקבעת מקומית על־פי רייסות של A, הרי ש־ $f_A = \bigcup_{\alpha'<\alpha} f_{(A\cap\alpha')}$.

לכל $\alpha' < \alpha$, מתקיים $\operatorname{Im}(f_{A\cap\alpha'}) = \delta_{A\cap\alpha'} \le \alpha' \le \alpha$.

ומכאן כי

$$\delta_A = \operatorname{Im}(f_A) = \bigcup_{\alpha'<\alpha} \operatorname{Im}(f_{(A\cap\alpha')}) = \sup_{\alpha'<\alpha} \delta_{\alpha'} \le \sup_{\alpha'<\alpha} \alpha' = \alpha$$

סה"כ $\delta_A \le \alpha$. ■

מסקנה 4.4 נניח $(A,<_A)$ ו־ $(B,<_B)$ סדרים טובים, וקיימת $\pi : A \to B$ חד־חד־ערכית שומרת סדר.
אז $\operatorname{otp}(A,<_A) \le \operatorname{otp}(B,<_B)$.

הוכחה: יהי $\delta := \operatorname{otp}(B,<_B)$. נבקש להראות כי $\operatorname{otp}(A,<_A) \le \delta$.
יהי $f_B : B \leftrightarrow \delta$ איזומורפיזם סדר מ־$(B,<_B)$ ל־$(\delta,\in)$. תהי $\pi : A \to B$ חח"ע שומרת־סדר מ־$(A,<_A)$ ל־$(B,<_B)$. נסמן

$$\overline{A} = \operatorname{Im}(f_B \circ \pi)$$

אז $\operatorname{otp}(A,<_A) = \operatorname{otp}(\overline{A},\in)$ ו־$\overline{A} \subseteq \delta$. סך הכל:

$$\operatorname{otp}(A,<_A) = \operatorname{otp}(\overline{A},\in) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{טענה קודמת}}}{\le} \delta = \operatorname{otp}(B,<_B)$$

■

מסקנה 4.5 לכל סודרים α,β,γ מתקיים:

$$\alpha + \gamma \le \alpha + \beta + \gamma$$

הוכחה: קל להגדיר העתקה חח"ע שומרת סדר מ־$(\alpha,\in)+(\gamma,\in)$ ל־$((\alpha,\in)+(\beta,\in))+(\gamma,\in)$. ■

מסקנה 4.6 אם $\begin{matrix}\alpha_1 \le \alpha_2 \\ \beta_1 \le \beta_2\end{matrix}$ סודרים, אז $\alpha_1+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_2$.

הוכחה: יהי δ כך ש־ $\alpha_1 + \delta = \alpha_2$. אז $\alpha_1 \le \alpha_1 + \delta$ ו־

$$\alpha_1+\beta_1 \le \alpha_1+\delta+\beta_1 = \alpha_2+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_2$$

■

מסקנה 4.7 אם $\begin{matrix}\alpha_1 \le \alpha_2 \\ \beta_1 \le \beta_2\end{matrix}$ סודרים, אז $\alpha_1\cdot\beta_1 \le \alpha_2\cdot\beta_2$.

הוכחה: כזכור:

$$\begin{gathered}\alpha\cdot\beta = \operatorname{otp}((\alpha,\in)\times(\beta,\in)) \\ \Vert \\ (C,<_C) \\ \Vert \\ C = \{(a,b) \mid a\in\alpha,\ b\in\beta\}\end{gathered}$$

ו־ $(a,b) <_C (a',b') \iff b <_B b'$ או ($b = b'$ ו־ $a <_A a'$). לכן העתקת הזהות היא העתקה חח"ע שומרת סדר מ־$(\alpha_1,\in)\times(\beta_1,\in)$ ל־$(\alpha_2,\in)\times(\beta_2,\in)$. ■

הגדרת חזקות סודרים

נניח α,β סודרים. לפונקציה $f:\beta\to\alpha$ נגדיר את התומך של f:

$$\mathrm{supp}(f)=\{\delta<\beta\mid f(\delta)\neq 0\}$$

נגדיר

$$E(\beta,\alpha):=\{f:\beta\to\alpha\mid \text{סופית } \mathrm{supp}(f)\}$$

שימו לב כי במקרה הפרטי בו β סופי, מתקיים $E(\beta,\alpha)={}^{\beta}\alpha$. כלומר:

$$E(\beta,\alpha)=\{f\mid f \text{ is a function from } \beta \text{ to } \alpha\}\,.$$

נסדר את $E(\beta,\alpha)$ בסדר מילוני עברי $<_E$, כדלקמן. בהנתן פונקציות f,g **שונות** עם תומך סופי, נסמן

$$\Delta(f,g):=\max\underbrace{\{\delta\in\beta\mid f(\delta)\neq g(\delta)\}}_{\text{קבוצה סופית}}$$

(שימו לב כי הקבוצה מימין אכן סופית, שכן היא מוכלת ב־$\mathrm{supp}(f)\cup\mathrm{supp}(g)$.)

כעת, אם $f(\Delta(f,g))<g(\Delta(f,g))$ נגדיר $f<_E g$, אחרת $g<_E f$.

אפשר להוכיח כי היחס $<_E$ הוא סדר טוב ע"י רשימה ארוכה של בדיקות. במקום זאת, נראה כי $(E(\beta,\alpha),<_E)$ איזומורפית־סדר לקבוצה סדורה היטב:

טענה 4.8 לכל סודרים α,β , $(E(\beta,\alpha),<_E)$ סדר טוב ו־

1. $\mathrm{otp}(E(0,\alpha),<_E)=1$.
2. $\mathrm{otp}(E(\beta+1,\alpha),<_E)=\mathrm{otp}(E(\beta,\alpha),<_E)\cdot\alpha$.
3. אם β גבולי, אז מתקיימת רציפות

$$\mathrm{otp}(E(\beta,\alpha),<_E)=\bigcup_{\gamma<\beta}\mathrm{otp}(E(\gamma,\alpha),<_E)$$

הוכחה: נקבע α, ונוכיח באינדוקציה על β.

1. היות ו־

$$E(0,\alpha)=\{f:0\to\alpha\mid \text{סופית } \mathrm{supp}(f)\}=\{\emptyset\}$$

נסיק כי

$$\mathrm{otp}(E(0,\alpha),<_E)=\mathrm{otp}(\{\emptyset\},<_E)=1$$

בפרט סדור היטב.

2. נניח β סודר, ו־ $(E(\beta,\alpha),<_E)$ סדר טוב.

נגדיר $\pi:E(\beta+1,\alpha)\to E(\beta,\alpha)\times\alpha$ כך שלכל $f:\beta+1\to\alpha$ בתחום ההגדרה:

$$\pi(f):=(f\restriction\beta,f(\beta))$$

π חד־חד־ערכי ועל (לא איבדנו אינפורמציה בפירוק הזה).

יתר על כן, π שומרת סדר מ־ $(E(\beta+1,\alpha),<_E)$ ל־ $(C,<_C)=(E(\beta,\alpha),<_E)\times(\alpha,\in)$,

שכן, עבור פונקציות $f<_E g$:

(א) אם $f(\beta) < g(\beta)$ אז $\pi(f) <_C \pi(g)$.

(ב) אם $f(\beta) = g(\beta)$ אז $g \restriction \beta <_E f \restriction \beta$, ושוב, מהגדרת $<_C$: $\pi(f) <_C \pi(g)$.

סך־הכל

$$\operatorname{otp}(E(\beta+1,\alpha),<_E) = \operatorname{otp}(E(\beta,\alpha),<_E)\cdot\alpha$$

3. נניח β גבולי ולכל $\gamma < \beta$ מתקיים כי $(E(\gamma,\alpha),<_E)$ סדר טוב. נסמן

$$\delta_\gamma = \operatorname{otp}(E(\gamma,\alpha),<_E)$$

נגדיר

$$\pi := \{(f,\tau) \mid f \in E(\beta,\alpha) \;\&\; \operatorname{otp}(\{g \in E(\beta,\alpha) \mid g <_E f\}) = \tau\}$$

לכל $\gamma < \beta$ נגדיר הרמה של $E(\gamma,\alpha)$ כדלקמן:

$$E^\gamma(\beta,\alpha) = \left\{f \in E(\beta,\alpha) \mid \gamma \le \gamma' < \beta \to f(\gamma') = 0\right\}$$

אז $(E^\gamma(\beta,\alpha),<_E)$ איזומורפי ל־$(E(\gamma,\alpha),<_E)$, ולכן

$$\pi_\gamma := \{(f,\tau) \mid f \in E^\gamma(\beta,\alpha) \;\&\; \operatorname{otp}(\{g \in E^\gamma(\beta,\alpha) \mid g <_E f\},<_E) = \tau\}$$

הוא איזומורפיזם שומר סדר מ־ $E^\gamma(\beta,\alpha)$ ל־ δ_γ. בנוסף, לכל $f \in E^\gamma(\beta,\alpha)$ מתקיים:

$$\{g \in E^\gamma(\beta,\alpha) \mid g <_E f\} = \{g \in E(\beta,\alpha) \mid g <_E f\}.$$

לכן, אם $\gamma < \gamma' < \beta$ אז $E^\gamma(\beta,\alpha) \subseteq E^{\gamma'}(\beta,\alpha)$ ו־$\pi_\gamma \subseteq \pi_{\gamma'}$.

היות והתומך של כל פונקציה ב־$E(\beta,\alpha)$ הוא סופי. מתקיים:

$$E(\beta,\alpha) = \bigcup_{\gamma<\beta} E^\gamma(\beta,\alpha)$$

לכן $\bigcup_{\gamma<\beta}\pi_\gamma = \pi$ הוא איזומורפיזם שומר סדר מ־ $E(\beta,\alpha)$ ל־ $\bigcup_{\gamma<\beta}\delta_\gamma$.

■

הגדרה 4.9 עבור סודרים α,β נגדיר

$$\alpha^\beta := \operatorname{otp}(E(\beta,\alpha),<_E)$$

אז ראינו:

1. $\alpha^0 = 1$.
2. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta\cdot\alpha$.
3. (רציפות) אם β גבולי, אז $\alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha^\gamma)$.

תרגיל: בהנתן סודרים α,β,γ הציגו איזומורפיזם שומר סדר מ־ $(E(\beta+\gamma,\alpha),<_E)$ לקבוצה הסדורה $(E(\beta,\alpha),<_E)\times(E(\gamma,\alpha),<_E)$, והסיקו כי $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$.

תרגיל: בהנתן סודרים α,β,γ הציגו קבוצות סדורות $(P,<_P),(Q,<_Q)$ המקיימות $((\alpha^\beta)^\gamma,\in) \cong (P,<_P) \cong (Q,<_Q) \cong (\alpha^{\beta\cdot\gamma},\in)$.