משפט 5.1 (Hartogs, 1915)

לכל קבוצה A, קיים סודר θ כך שאין העתקה חד־חד־ערכית מ־ θ ל־ A.

הוכחה: נסמן

$$H(A) := \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists f : \alpha \xrightarrow{1-1} A\}.$$

(לב העניין הוא לבדוק ש־ $H(A)$ אכן קבוצה. נחזור לכך לאחר שנפגוש את האקסיומות של ZF.)

נשים לב כי הקבוצה $H(A)$ היא טרנזיטיבית:

אכן, אם $\beta \in \alpha \in H(A)$, ו־ $f : \alpha \to A$ מעידה כי $H(A) \ni \alpha$,

אז $f \restriction \beta$ פונקציה חד־חד־ערכית, המעידה כי $H(A) \ni \beta$.

בהרצאה 2 ראינו כי כל קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר, לכן $H(A)$ סודר, נסמנו ב־ θ.

לבסוף, אילו היתה קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $f : \theta \to A$, אז θ היה שייך ל־ $\theta = H(A)$, אבל ראינו בהרצאה 2 כי אין פרדוקס ראסל לסודרים, וזאת תהיה סתירה.

לכן θ כמבוקש. ■

הערה 5.2 מההוכחה הנ"ל אנו רואים כי $H(A)$ הוא הסודר הקטן ביותר כך שלא קיימת פונקציה חד־חד־ערכית מ־ $H(A)$ ל־ A.

הגדרה 5.3 נאמר כי f היא פונקציה חלקית מ־B ל־A, ונסמן $f : B \rightharpoonup A$ אמ"מ קיימת $B \supseteq B'$ עבורה f מהצורה $f : B' \to A$.

הגדרה 5.4 נסמן את אוסף כל הפונקציות החלקיות מ־B ל־A ב־ $\mathrm{Par}(B, A)$.

כלומר, $\mathrm{Par}(B, A) := \bigcup_{B' \subseteq B} {}^{B'}A$.

משפט 5.5 (משפט ההגדרה ברקורסיה. פון ניומן, 1923).

נניח θ סודר, ו־A קבוצה כלשהי. נסמן $P := \mathrm{Par}(\theta, A)$.

לכל פונקציה $F : P \to A$, קיימת ביחידות פונקציה $G : \theta \to A$, המקיימת לכל $\theta > \beta$:

$$G(\beta) = F(G \restriction \beta).$$

הוכחה: עבור סודר $\theta \geq \gamma$, נאמר כי $g : \theta \rightharpoonup A$ היא γ־קירוב טוב אמ"מ $\mathrm{dom}(g) = \gamma$, ולכל $\gamma > \beta$, מתקיים:

$$g(\beta) = F(g \restriction \beta).$$

תת־טענה 1: לכל סודר $\theta \geq \gamma$, אם g_1, g_2 הם γ־קירובים טובים, אז $g_1 = g_2$.

הוכחה: אחרת, הקבוצה $\mathcal{S} := \{\beta < \gamma \mid g_1(\beta) \neq g_2(\beta)\}$ אינה ריקה, ויש לה איבר ראשון - נסמנו ב־β. ממינימליות β נובע כי $g_1 \restriction \beta = g_2 \restriction \beta$, ומכאן כי

$$g_1(\beta) = F(g_1 \restriction \beta) = F(g_2 \restriction \beta) = g_2(\beta)$$

בסתירה לכך ש־ β שייך ל־$\mathcal{S}$.

מש"ל תת־טענה 1 ☒

תת־טענה 2: לכל $\theta \geq \gamma$, קיים γ־קירוב טוב.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית לכל γ מתחת ל-θ.

בסיס האינדוקציה: נגדיר $g : 0 \to B$ להיות הפונקציה הריקה, $\emptyset$.
אז g היא 0-קירוב טוב.

שלב עוקב: נניח $\gamma < \theta$ עבורו קיימת $g : \gamma \to B$ המהווה γ-קירוב טוב.
נגדיר $h : \gamma + 1 \to B$ על-ידי

$$h := g \cup \{(\gamma, F(g))\}.$$

אז h היא $\gamma + 1$-קירוב טוב.

שלב גבולי: נניח $\gamma \leq \theta$ גבולי, ולכל $\beta < \gamma$, יש β-קירוב טוב, שיסומן ב- g_β.
נבקש להראות כי קיים γ-קירוב טוב.
ברור כי לכל $\alpha < \beta < \gamma$, הצמצום $g_\beta \restriction \alpha$ הוא α-קירוב טוב.
לכן נובע מתת-טענה 1 כי $g_\alpha \subseteq g_\beta$.
כלומר, התקבל כי

$$G := \{g_\beta \mid \beta < \gamma\}$$

סדורה קווית לפי יחס ההכלה $\subset$.
ולכן, כפי שעשינו בהוכחת משפט קנטור בשיעור הראשון, נוכל להגדיר

$$g_\gamma : \gamma \to A$$

על-ידי הכלל

קיימת $g \in G$ כך ש- $g(x) = y \iff g_\gamma(x) = y$.

במילים אחרות, $g_\gamma = \bigcup G$.
כיוון ש-γ גבולי, $\operatorname{dom}(g_\gamma) = \bigcup_{\beta<\gamma} \operatorname{dom}(g_\beta) = \bigcup \gamma = \gamma$.
סה"כ g_γ מוגדרת היטב, והיא γ-קירוב טוב.

מש"ל תת-טענה 2☒

מתת-טענה 2, קיים θ-קירוב טוב. מתת-טענה 1, קירוב זה הוא יחיד. לכן קיבלנו את המבוקש. ■

מסקנה 5.6 (משפט ההגדרה ברקורסיה לקבוצות סדורות היטב)
נניח $(B, <)$ קבוצה סדורה היטב, ו-A קבוצה כלשהי. נסמן $P := \operatorname{Par}(B, A)$.
לכל פונקציה $F : P \to A$, קיימת ביחידות פונקציה $G : B \to A$, המקיימת לכל $b \in B$:

$$G(b) = F(G \restriction b_\downarrow).$$

הוכחה: נפנה למשפט 5.5 עם הסודר $\theta := \operatorname{otp}(B, <)$. ■

הערה 5.7 ההוכחה של משפט 5.5 מראה שגם המשפט הבא נכון: לכל פונקציית מחלקה F המוגדרת על כל עולם הקבוצות, קיימת ביחידות פונקציית מחלקה G המוגדרת על כל הסודרים כך שלכל סודר β מתקיים

$$G(\beta) = F(G \restriction \beta).$$

אקסיומת הבחירה

הגדרה 5.8 (אקסיומת הבחירה. ב. לוי, 1902. א. שמידט, 1904)

אם $\mathcal{S}$ קבוצה של קבוצות, $\bigcup\mathcal{S}\neq\emptyset$,[1] אז קיימת $f:\mathcal{S}\to\bigcup\mathcal{S}$ כך ש־ $f(\mathrm{X})\in\mathrm{X}$ לכל $\mathrm{X}\in\mathcal{S}$ לא ריקה.

הגדרה 5.9 נניח $(A,<)$ קס"ח.

- $B\subseteq A$ נקראת שרשרת אמ"מ $(B,<)$ סדורה קווית.
- $B\subseteq A$ היא שרשרת מקסימלית אמ"מ B שרשרת, ולכל $a\in A\setminus B$, $B\cup\{a\}$ איננה שרשרת.
- $B\subseteq A$ תקרא חסומה ב־$(A,<)$ אמ"מ קיים $a\in A$ כך שלכל $b\in B$ מתקיים $a=b$ או $b<a$.
- איבר $a\in A$ נקרא מקסימלי אמ"מ לא קיים $b\in A$ כך ש־ $a<b$.

עקרון הסדר הטוב של צרמלו: לכל קבוצה A קיים יחס $<_W$ כך ש־ $(A,<_W)$ סדורה היטב.

הערה 5.10 עקרון הסדר הטוב היה השערה של קנטור מ־1883. את האישוש סיפק צרמלו ב־1904.

עקרון המקסימום של האוסדורף: כל קס"ח מכילה שרשרת מקסימלית.

הלמה של צורן: נניח $(A,<)$ קס"ח לא ריקה עם התכונה שכל שרשרת ב־$(A,<)$ חסומה ב־$(A,<)$.

אז ל־$(A,<)$ יש איבר מקסימלי.

הערה 5.11 את העקרון המופיע בלמה של צורן ניסח האוסדורף ב־1909. העובדה כי הלמה שקולה לאקסיומת הבחירה הוכחה ע"י צורן ב־1935.

טענה 5.12 הבאים שקולים מעל מערכת האקסיומות ZF:

1. הלמה של צורן.
2. עקרון המקסימום של האוסדורף.
3. עקרון הסדר הטוב של צרמלו.
4. אקסיומת הבחירה.

הוכחה: $\underline{1\Leftarrow 2:}$ נניח $(A,<)$ קס"ח. נבקש למצוא שרשרת מקסימלית ב־ $(A,<)$.

נגדיר קס"ח משני $(\mathbb{P},\subset)$, כדלקמן:

$$\mathbb{P}:=\{B\in\mathcal{P}(A)\mid (A,<)\text{-שרשרת ב } B\}.$$

תת־טענה 1: כל שרשרת ב־ $(\mathbb{P},\subset)$ היא חסומה ב־ $(\mathbb{P},\subset)$.

הוכחה: נניח $\mathbb{C}$ שרשרת ב־ $(\mathbb{P},\subset)$. נגדיר

$$D:=\bigcup\mathbb{C}=\bigcup\{B\mid B\in\mathbb{C}\}.$$

נשים לב כי $D\in\mathbb{P}$, כלומר כי D שרשרת ב־ $(A,<)$.

אכן, בהנתן $x,y\in D$ שונים, נבחר B_x,B_y ב־$\mathbb{C}$ כך ש־ $x\in B_x$ ו־ $y\in B_y$.

כיוון ש־ $\mathbb{C}$ שרשרת ב־$(\mathbb{P},\subset)$, מתקיים $B_x\subseteq B_y$ או $B_y\subseteq B_x$. בה"כ, $B_x\subseteq B_y$.

אז $x,y\in B_y$, וכיוון ש־ B_y שרשרת ב־ $(A,<)$, נקבל $x<y$ או $y<x$, כמבוקש.

הראנו כי $D\in\mathbb{P}$. כמו־כן, מיידי לראות כי $B\subseteq D$ לכל $B\in\mathbb{C}$.

מכאן כי D עדות לכך שהשרשרת $\mathbb{C}$ חסומה ב־ $(\mathbb{P},\subset)$.

[1] כלומר, ב־$\mathcal{S}$ יש לפחות קבוצה אחת לא ריקה.

משל תת־טענה 1$\boxtimes$

כעת, מהלמה של צורן, קיים ב־$(\mathbb{P}, \subset)$ איבר מקסימלי, נסמנו ב־ B.

היות ו־$B \in \mathbb{P}$, כמובן מתקיים כי B שרשרת ב־ $(A, <)$. נשים לב כי B מקסימלית שכן, אם קיים $a \in A \setminus B$, כך ש־ $B \cup \{a\}$ שרשרת, הרי ש־ $B \cup \{a\}$ שייך ל־ $(\mathbb{P}, \subset)$, ומקיים $B \subset B \cup \{a\}$, בסתירה למקסימליות של B ב־ $(\mathbb{P}, \subset)$.

<u>$2 \Leftarrow 3$:</u> נניח A קבוצה כלשהי.

אם A ריקה, אז $(A, \emptyset)$ סדר טוב וסיימנו.

נניח כעת כי A לא ריקה. נתבונן באוסף כל הפונקציות החח"ע מסודר כלשהו ל־A:

$$P := \{f : \alpha \xrightarrow{1-1} A \mid \alpha \in On\}.$$

אז $(P, \subset)$ סדורה חלקית,[2] ולכן יש לה שרשרת מקסימלית, נסמנה ב־G.

משיקולים שכבר פגשנו מספר פעמים, $g := \bigcup G$ היא פונקציה חד־חד־ערכית מסודר כלשהו δ ל־ A.

נשים לב כי אם $g : \delta \to A$ איננה על, אז ניתן לבחור איזשהו $a \in A$ שאיננו בתמונת g, ואז

$$g' := g \cup \{(\delta, a)\}$$

תהווה פונקציה חד־חד־ערכית מ־ $\delta + 1$ ל־ A, ומתקיים $g' \in P \setminus G$.

אך אז $G \cup \{g'\}$ שרשרת המרחיבה את G, בסתירה למקסימליות G.

סה"כ קיבלנו כי $g : \delta \leftrightarrow A$ חד־חד־ערכית ועל. כעת נגדיר יחס $<_W$ על A, על־ידי הכלל:

$$a <_W b \iff g^{-1}(a) \in g^{-1}(b)$$

אז g איזומורפיזם שומר סדר מ־ $(\delta, \in)$ ל־ $(A, <_W)$, ובפרט $(A, <_W)$ סדר טוב.

<u>$3 \Leftarrow 4$:</u> נניח $\mathcal{S}$ קבוצה של קבוצות, ו־$\bigcup \mathcal{S}$ לא ריקה. יהי $<_W$ סידור טוב של $\bigcup \mathcal{S}$.

נגדיר $f := \{(X, \min(X, <_W)) \mid X \in \mathcal{S}, X \neq \emptyset\}$. ישנן שתי אפשרויות:

- אם $\emptyset \notin \mathcal{S}$, אז $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ פונקציית בחירה, וסיימנו.
- אם $\emptyset \in \mathcal{S}$, אז נבחר איבר שרירותי a ב־$\bigcup S$, ונסיק כי $f \cup \{(\emptyset, a)\}$ פונקציית בחירה כנדרש.

<u>$4 \Leftarrow 1$:</u> נניח $(A, \lhd)$ קס"ח לא ריקה, וכל שרשרת ב־$(A, \lhd)$ חסומה ב־$(A, \lhd)$. נבקש למצוא איבר מקסימלי.

תהי $c : \mathcal{P}(A) \to A$ פונקציית בחירה, כלומר $c(X) \in X$ לכל תת־קבוצה לא ריקה X של A.

יהי θ סודר כך שאין פונקציה חד־חד־ערכית מ־θ ל־ A. למשל, $\theta := H(A)$.

נסמן $P := \mathrm{Par}(\theta, A)$, ונגדיר $F : P \to A$ כדלקמן.

לכל $g \in P$, נתבונן בקבוצת האיברים ב־A הגדולים מכל איברי תמונת g:

$$U_g := \{b \in A \mid \forall \alpha \in \mathrm{dom}(g)(g(\alpha) \lhd b)\},$$

ואז:

$$F(g) := \begin{cases} c(U_g), & U_g \neq \emptyset; \\ c(A), & U_g = \emptyset. \end{cases}.$$

כעת, ממשפט ההגדרה ברקורסיה, קיימת פונקציה

$$G : \theta \to A$$

כך שלכל $\beta < \theta$:

$$G(\beta) = F(G \restriction \beta).$$

מבחירת θ נובע כי G איננה חח"ע.

יהי לכן $\gamma < \theta$ הסודר הקטן ביותר עבורו קיים $\beta < \gamma$ כך ש־$G(\beta) = G(\gamma)$. בפרט $G \restriction \gamma$ חח"ע.

[2] הסדר $\subset$ מתלכד עם הסדר $\prec$ שהגדרנו לטובת הוכחת משפט קנטור בשיעור הראשון.

תת־טענה 2: התמונה של $G \restriction \gamma$ היא שרשרת ב־ $(A, \lhd)$.

הוכחה: נניח a, b איברים שונים בתמונה של $G \restriction \gamma$.

יהי α, β סודרים ב־γ כך ש־ $a = G(\alpha)$ ו־$b = G(\beta)$. בה"כ $\alpha < \beta$. כזכור:

$$G(\beta) = F(G \restriction \beta) = \begin{cases} c(U_{G\restriction\beta}), & U_{G\restriction\beta} \neq \emptyset; \\ c(A), & U_{G\restriction\beta} = \emptyset. \end{cases}$$

- אם $U_{G\restriction\beta}$ לא ריקה, הרי ש־ $G(\beta) \in U_{G\restriction\beta}$, ובפרט $a = G(\alpha) \lhd G(\beta) = b$.
- אם $U_{G\restriction\beta}$ ריקה , אז $G(\beta) = c(A) = c(U_\emptyset) = G(0)$ בסתירה לכך ש־$G \restriction \gamma$ חח"ע ו־ $0 \le \alpha < \beta < \gamma$.

סה"כ, קיבלנו כי a, b אכן בני־השוואה ביחס ל־$\lhd$.

מש"ל תת־טענה 2$\boxtimes$

כעת, כיוון שכל שרשרת ב־$(A, \lhd)$ היא חסומה ב־$(A, \lhd)$, נוכל לקבוע $a \in A$ כלשהו כך שלכל $\beta < \gamma$:

$G(\beta) = a$ או $G(\beta) \lhd a$.

תת־טענה 3: a מקסימלי ב־ $(A, \lhd)$

הוכחה: אחרת, קיים $b \in A$ המקיים $a \lhd b$, ומטרנזיטיביות של $\lhd$ ובחירת a, נקבל כי לכל $\beta < \gamma$:

$G(\beta) \lhd b$,

כלומר, b מעיד כי $U_{G\restriction\gamma}$ לא ריקה, ואז $G(\gamma) = c(U_{G\restriction\gamma})$. בפרט, $G(\beta) \lhd G(\gamma)$ לכל $\beta < \gamma$.
התקבל כי $G(\beta) \neq G(\gamma)$ לכל $\beta < \gamma$, בסתירה לבחירת γ.

מש"ל תת־טענה 3$\boxtimes$

הראנו כי ב־$(A, \lhd)$ יש איבר מקסימלי, כמבוקש. $\blacksquare$

טענה 5.13 (Hartogs, 1915) התנאים הבאים שקולים:

1. לכל שתי קבוצות לא ריקות X, Y לפחות אחד מהבאים מתקיים:
   (א) קיימת $f : X \to Y$ חד־חד־ערכית.
   (ב) קיימת $f : Y \to X$ חד־חד־ערכית.
2. עקרון הסדר הטוב של צרמלו.

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$: נניח A קבוצה לא ריקה. יהי $\theta := H(A)$ מספר הרטוגס שלה. בפרט, לא קיימת פונקציה חד־חד־ערכית מ־θ ל־A. אז מההנחה, נובע כי קיימת בהכרח פונקציה חח"ע $f : A \to \theta$.

נגדיר יחס $<_W$ על A, על־ידי הכלל:

$a <_W b \iff f(a) \in f(b)$.

אז $<_W$ סידור טוב של A, כמבוקש.

$2 \Leftarrow 1$: נסדר את $X \cup Y$ בסדר טוב כלשהו $<_W$. יהי $\alpha := \mathrm{otp}(X, <_W)$ ו־$\beta := \mathrm{otp}(Y, <_W)$.

אז α, β סודרים, וקיימות בפרט פונקציות חח"ע ועל $g_X : \alpha \leftrightarrow X$ ו־$g_Y : \beta \leftrightarrow Y$.

היות ו־α, β סודרים, מתקיים אחד משניים:

- $\alpha < \beta$. במקרה זה, $g_Y \circ g_X^{-1}$ פונקציה חח"ע מ־X ל־Y.
- $\beta \leq \alpha$. במקרה זה, $g_X \circ g_Y^{-1}$ פונקציה חח"ע מ־Y ל־X.

■

מסקנה 5.14 אקסיומת הבחירה שקולה לכך שלכל שתי קבוצות X, Y מתקיים $|X| \leq |Y|$ או $|Y| \leq |X|$.

נספח ־ תוספת על אקסיומת הבחירה

קודם לכן הראנו כי עקרון הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה, וכן הוכחנו את הגרירה בכיוון ההפוך. אולם ההוכחה היתה עקיפה. כעת נציג הוכחה ישירה.

הוכחה: נניח A קבוצה לא ריקה. נבקש למצוא סידור טוב שלה. תהי $f : \mathcal{P}(A) \to A$, פונקצית בחירה.

יהי $\theta := H(A)$ מספר הרטוגס של A. תהי P קבוצת כל הפונקציות החלקיות מ־θ ל־A.

נגדיר $F : P \to A$ ע"י הכלל:

$$F(g) := f(A \setminus \mathrm{Im}(g)).$$

ממשפט ההגדרה ברקורסיה, נקבל פונקציה $G : \theta \to A$ המכבדת את F.

כיוון ש־$\theta = H(A)$, הפונקציה G איננה חח"ע. יהי לכן $\gamma < \theta$ הסודר הראשון כך שקיים $\beta < \gamma$ עבורו $G(\beta) = G(\gamma)$.

אם $A \setminus G[\gamma]$ איננה ריקה, הרי שמהגדרת F והעובדה ש־f פונקצית בחירה נקבל

$$G(\gamma) = f(A \setminus \mathrm{Im}(G \restriction \gamma)) \in A \setminus G[\gamma]$$

בסתירה לכך ש־$G(\gamma) = G(\beta) \in G[\gamma]$.

נובע לכן כי $G[\gamma] = A$, ומכאן כי $G \restriction \gamma$ היא פונקציה חח"ע מהסודר γ על A, ובכך משרה סדר טוב על A (מטיפוס סדר γ). ■

תרגיל 5.15 הוכיחו באינדוקציה כי אם $\mathcal{S}$ קבוצה סופית לא ריקה, אז קיימת ל־$\mathcal{S}$ פונקציית בחירה.

כעת ניגש לטפל ב**משפט טיכונוף**.

נזכיר כי מבנה (X, τ) הוא מרחב טופולוגי אמ"מ הבאים מתקיימים:

1. $\{X, \emptyset\} \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$;
2. אם $\mathcal{U} \subseteq \tau$, אז $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$;
3. אם $\mathcal{U} \subseteq \tau$ סופית, אז $\bigcap \mathcal{U} \in \tau$.

הגדרה 5.16 עבור מרחב טופולוגי (X, τ), $\mathcal{U}$ נקראת כיסוי פתוח אם $X = \bigcup \mathcal{U}$ ו־$\mathcal{U} \subseteq \tau$.

(X, τ) נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\mathcal{U} \subseteq \tau$ קיימת $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ **סופית** המהווה כיסוי פתוח.

טופולוגיית המכפלה: נניח $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ מרחבים טופולוגיים.

מרחב המכפלה של הקבוצה הנ"ל הוא המרחב $(\mathbb{P}, \tau)$, כאשר:

$$\mathbb{P} := \{f : I \to \bigcup_i X_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in X_i\}$$

ו־ τ היא הטופולוגיה הגסה ביותר עבורה לכל $i \in I$, ההטלה $\pi_i : \mathbb{P} \to X_i$ המוגדרת ע"י

$$\pi_i(f) := f(i)$$

היא רציפה. כלומר, לכל $i \in I$ ולכל $G \in \tau_i$, דורשים כי $\pi_i^{-1}[G]$ שייך ל־ τ.

משפט 5.17 (משפט טיכונוף)

מכפלה כלשהי של מרחבים טופולוגיים קומפקטיים היא קומפקטית.

המשפט הוכח ע"י Tychonoff ב-1935 תוך הסתמכות על אקסיומת הבחירה. ב-1950, Kelley הוכיח כי ה"משפט" בעצם שקול לאקסיומת הבחירה (מעל מערכת האקסיומות של ZF). נציג כעת הוכחה למשפטו של קלי.

הוכחה: נניח $\mathcal{S}$ קבוצה המקיימת $\bigcup \mathcal{S} \neq \emptyset$. נבקש למצוא פונקציית בחירה עבור $\mathcal{S}$. נגדיר $S := \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$. אז מספיק למצוא פונקציה $f : S \to \bigcup S$ כך ש-$f(X) \in X$ לכל $X \in S$.

תהי m קבוצה כלשהי כך ש-$m \not\ni X$ לכל $X \in S$. למשל $m := S$.[3]

נגדיר $\overline{X} := X \uplus \{m\}$, ו- $\tau_{\overline{X}} := \{\emptyset, \overline{X}, \{m\}, X\}$.

אז $\left(\overline{X}, \tau_{\overline{X}}\right)$ מרחב טופולוגי קומפקטי מהסיבה הטריוויאלית ש- $\tau_{\overline{X}}$ סופית.

יהי $(\mathbb{P}, \tau)$ מרחב המכפלה של $\left\{\left(\overline{X}, \tau_{\overline{X}}\right) \mid X \in S\right\}$.

לכל $X \in S$, נתבונן בקבוצה

$$U_X := \{g \in \mathbb{P} \mid g(X) = m\}.$$

תכונות:

- U_X איננה ריקה שכן הפונקציה הקבועה $g : S \to \{m\}$ שייכת ל-U_X.
- $U_X = \pi_X^{-1}(\{m\})$.

כיוון ש-$\{m\}$ פתוחה ב-$\left(\overline{X}, \tau_{\overline{X}}\right)$, נסיק סה"כ כי הקבוצה הלא-ריקה U_X פתוחה ב-$(\mathbb{P}, \tau)$.

תת-טענה: אם $A \subseteq S$ סופית, אז $\{U_X \mid X \in A\}$ איננה כיסוי של $\mathbb{P}$.

הוכחה: כיוון ש- A סופית, נוכל לקחת פונקציית בחירה $f : A \to \bigcup A$. כלומר, $f(X) \in X$ לכל $X \in A$.

נגדיר נקודה g במרחב המכפלה $\mathbb{P}$ על-ידי הכלל

$$g(X) := \begin{cases} f(X), & X \in A; \\ m, & X \in S \setminus A. \end{cases}$$

לכל $X \in A$, מתקיים $g(X) = f(X) \in X$, ובפרט $g(X) \neq m$. לכן $g(X) \notin U_X$.

סה"כ $g \in \mathbb{P} \setminus \bigcup_{X \in A} U_X$, ובפרט $\{U_X \mid X \in A\}$ איננו כיסוי של $\mathbb{P}$.

מש"ל תת-טענה☒

היות ו-$(\mathbb{P}, \tau)$ קומפקטי, וכל תת-משפחה סופית של $\{U_X \mid X \in S\} \subseteq \tau$ איננה כיסוי, נובע כי המשפחה כולה $\{U_X \mid X \in S\}$ איננה כיסוי. תהי לכן $f \in \mathbb{P} \setminus \bigcup_{X \in S} U_X$. לכל $X \in S$ מתקיים:

- $f \in \mathbb{P}$, ולכן $f(X) \in \overline{X}$.
- $f \notin U_X$, ולכן $f(X) \neq m$.
- $\overline{X} = X \cup \{m\}$.

סה"כ $f(X) \in X$ לכל $X \in S$, פונקציית בחירה כמבוקש. ■

[3] מאקסיומת היסוד לא יתכן $S \ni X \ni S$. נראה בהרצאה הבאה.