

דיון. עקרון הסדר הטוב.

משפט 5.1 (Hartogs, 1915)

לכל קבוצה A , קיים סודר θ כך שאין העתקה חד-חד-ערכית מ- θ ל- A .

הוכחה: נסמן

$$H(A) := \{\alpha \in \text{On} \mid \exists f : \alpha \xrightarrow{1-1} A\}$$

(לב העניין הוא לבדוק ש- $H(A)$ אכן קבוצה. נחזור לכך לאחר שנפגוש את האקסיומות של ZF).

נשים לב כי הקבוצה $H(A)$ היא טרנזיטיבית:

אכן, אם $\beta \in \alpha \in H(A)$, ו- $f : \alpha \rightarrow A$ מעידה כי $\alpha \in H(A)$,

אז $f \upharpoonright \beta$ פונקציה חד-חד-ערכית, המעידה כי $\beta \in H(A)$.

בהרצאה 2 ראינו כי כל קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר, לכן $H(A)$ סודר, נסמנו ב- θ .

לבסוף, אילו היתה קיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f : \theta \rightarrow A$, אז θ היה שייך ל- $H(A) = \theta$, אבל ראינו בהרצאה 2 כי אין פרדוקס ראסל לסודרים, וזאת תהיה סתירה.

לכן θ כמבוקש. ■

הערה 5.2 מההוכחה הנ"ל אנו רואים כי $H(A)$ הוא הסודר הקטן ביותר כך שלא קיימת פונקציה חד-חד-ערכית מ- $H(A)$ ל- A .

הגדרה 5.3 נאמר כי f היא פונקציה חלקית מ- B ל- A , ונסמן $f : B \rightarrow A$ אמ"מ קיימת $B \supseteq B'$ עבורה f מהצורה $f : B' \rightarrow A$.

הגדרה 5.4 נסמן את אוסף כל הפונקציות החלקיות מ- B ל- A ב- $\text{Par}(B, A)$.

$$\text{Par}(B, A) := \bigcup_{B' \subseteq B} B' A$$

משפט 5.5 (משפט ההגזרה ברקורסיה. פון ניומן, 1923).

נניח θ סודר, ו- A קבוצה כלשהי. נסמן $P := \text{Par}(\theta, A)$.

לכל פונקציה $F : P \rightarrow A$, קיימת ביחידות פונקציה $G : \theta \rightarrow A$, המקיימת לכל $\theta > \beta$:

$$G(\beta) = F(G \upharpoonright \beta)$$

הוכחה: עבור סודר $\theta \geq \gamma$, נאמר כי $g : \theta \rightarrow A$ היא γ -קירוב טוב אמ"מ $\text{dom}(g) = \gamma$, ולכל $\gamma > \beta$, מתקיים:

$$g(\beta) = F(g \upharpoonright \beta)$$

תת-טענה 1: לכל סודר $\theta \geq \gamma$, אם g_1, g_2 הם γ -קירובים טובים, אז $g_1 = g_2$.

הוכחה: אחרת, הקבוצה $S := \{\beta < \gamma \mid g_1(\beta) \neq g_2(\beta)\}$ אינה ריקה, ויש לה איבר ראשון - נסמנו ב- β . ממנימליות β נובע כי $g_1 \upharpoonright \beta = g_2 \upharpoonright \beta$, ומכאן כי

$$g_1(\beta) = F(g_1 \upharpoonright \beta) = F(g_2 \upharpoonright \beta) = g_2(\beta)$$

בסתירה לכך ש- β שייך ל- S .

מש"ל תת-טענה 1

תת-טענה 2: לכל $\gamma \geq \theta$, קיים γ -קירוב טוב.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית לכל γ מתחת ל- θ .

בסיס האינדוקציה: נגדיר $g : 0 \rightarrow B$ להיות הפונקציה הריקה, \emptyset .

אז g היא 0-קירוב טוב.

שלב עוקב: נניח $\theta > \gamma$ עבורו קיימת $g : \gamma \rightarrow B$ המהווה γ -קירוב טוב.

נגדיר $h : \gamma + 1 \rightarrow B$ על-ידי

$$h := g \cup \{(\gamma, F(g))\}$$

אז h היא $\gamma + 1$ -קירוב טוב.

שלב גבולי: נניח $\theta \geq \gamma$ גבולי, ולכל $\beta > \gamma$, יש β -קירוב טוב, שיסומן ב- g_β .

נבקש להראות כי קיים γ -קירוב טוב.

ברור כי לכל $\beta > \alpha$, הצמצום $g_\beta \upharpoonright \alpha$ הוא α -קירוב טוב.

לכן נובע מתת-טענה 1 כי $g_\alpha \subseteq g_\beta$.

כלומר, התקבל כי

$$G := \{g_\beta \mid \beta < \gamma\}$$

סדורה קווית לפי יחס ההכלה \subset .

ולכן, כפי שעשינו בהוכחת משפט קנטור בשיעור הראשון, נוכל להגדיר

$$g_\gamma : \gamma \rightarrow A$$

על-ידי הכלל

קיימת $g \in G$ כך ש- $g(x) = y \iff g_\gamma(x) = y$.

במילים אחרות, $g_\gamma = \bigcup G$.

כיוון ש- γ גבולי, $\text{dom}(g_\gamma) = \bigcup_{\beta < \gamma} \text{dom}(g_\beta) = \bigcup \gamma = \gamma$.

סה"כ g_γ מוגדרת היטב, והיא γ -קירוב טוב.

מש"ל תת-טענה 2

מתת-טענה 2, קיים θ -קירוב טוב. מתת-טענה 1, קירוב זה הוא יחיד. לכן קיבלנו את המבוקש.

מסקנה 5.6 (משפט ההגזרה ברקורסיה לקבוצות סדורות היטב)

נניח $(B, <)$ קבוצה סדורה היטב, ו- A קבוצה כלשהי. נסמן $P := \text{Par}(B, A)$.

לכל פונקציה $F : P \rightarrow A$, קיימת ביחידות פונקציה $G : B \rightarrow A$, המקיימת לכל $b \in B$:

$$G(b) = F(G \upharpoonright b_\downarrow)$$

הוכחה: נפנה למשפט 5.5 עם הסודר $\theta := \text{otp}(B, <)$.

הערה 5.7 ההוכחה של משפט 5.5 מראה שגם המשפט הבא נכון: לכל פונקציית מחלקה F המוגדרת על כל עולם הקבוצות, קיימת ביחידות פונקציית מחלקה G המוגדרת על כל הסודרים כך שלכל סודר β מתקיים

$$G(\beta) = F(G \upharpoonright \beta)$$

אקסיומת הבחירה

הגדרה 5.8 (אקסיומת הבחירה. ג. לוי, 1902. א. שמידט, 1904)

אם \mathcal{S} קבוצה של קבוצות, $\bigcup \mathcal{S} \neq \emptyset$ ¹, אז קיימת $f: \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ כך ש- $f(X) \in X$ לכל $X \in \mathcal{S}$ לא ריקה.

הגדרה 5.9 נניח $(A, <)$ קס"ח.

- $A \supseteq B$ נקראת שרשרת אמ"מ $(B, <)$ סדורה קווית.
- $A \supseteq B$ היא שרשרת מקסימלית אמ"מ B שרשרת, ולכל $a \in A \setminus B$, $B \cup \{a\}$ איננה שרשרת.
- $A \supseteq B$ תקרא חסומה ב- $(A, <)$ אמ"מ קיים $a \in A$ כך שלכל $b \in B$ מתקיים $b = a$ או $b < a$.
- איבר $a \in A$ נקרא מקסימלי אמ"מ לא קיים $b \in A$ כך ש- $a < b$.

עקרון הסדר הטוב של צרמלו: לכל קבוצה A קיים יחס $<_W$ כך ש- $(A, <_W)$ סדורה היטב.

הערה 5.10 עקרון הסדר הטוב היה השערה של קנטור מ-1883. את האישוש סיפק צרמלו ב-1904.

עקרון המקסימום של האוסדורף: כל קס"ח מכילה שרשרת מקסימלית.

הלמה של צורן: נניח $(A, <)$ קס"ח לא ריקה עם התכונה שכל שרשרת ב- $(A, <)$ חסומה ב- $(A, <)$. אז ל- $(A, <)$ יש איבר מקסימלי.

הערה 5.11 את העקרון המופיע בלמה של צורן ניסח האוסדורף ב-1909. העובדה כי הלמה שקולה לאקסיומת הבחירה הוכחה ע"י צורן ב-1935.

טענה 5.12 הבאים שקולים מעל מערכת האקסיומות ZF :

1. הלמה של צורן.
2. עקרון המקסימום של האוסדורף.
3. עקרון הסדר הטוב של צרמלו.
4. אקסיומת הבחירה.

הוכחה: $2 \Leftrightarrow 1$: נניח $(A, <)$ קס"ח. נבקש למצוא שרשרת מקסימלית ב- $(A, <)$. נגדיר קס"ח משני (\mathbb{P}, \subset) , כדלקמן:

$$\mathbb{P} := \{B \in \mathcal{P}(A) \mid B \text{ שרשרת ב-}(A, <)\}$$

תת-טענה 1: כל שרשרת ב- (\mathbb{P}, \subset) היא חסומה ב- (\mathbb{P}, \subset) .

הוכחה: נניח \mathbb{C} שרשרת ב- (\mathbb{P}, \subset) . נגדיר

$$D := \bigcup \mathbb{C} = \bigcup \{B \mid B \in \mathbb{C}\}$$

נשים לב כי $D \in \mathbb{P}$, כלומר כי D שרשרת ב- $(A, <)$.

אכן, בהנתן $x, y \in D$ שונים, נבחר $B_x, B_y \in \mathbb{C}$ כך ש- $x \in B_x$ ו- $y \in B_y$.

כיוון ש- \mathbb{C} שרשרת ב- (\mathbb{P}, \subset) , מתקיים $B_x \subseteq B_y$ או $B_y \subseteq B_x$. בה"כ, $B_x \subseteq B_y$.

אז $x, y \in B_y$ וכיוון ש- B_y שרשרת ב- $(A, <)$, נקבל $x < y$ או $y < x$, כמבוקש.

הראנו כי $D \in \mathbb{P}$. כמורכן, מידי לראות כי $B \subseteq D$ לכל $B \in \mathbb{C}$.

מכאן כי D עדות לכך שהשרשרת \mathbb{C} חסומה ב- (\mathbb{P}, \subset) .

¹ כלומר, ב- \mathcal{S} יש לפחות קבוצה אחת לא ריקה.

מש"ל תת-טענה 1

כעת, מהלמה של צורן, קיים ב- (\mathbb{P}, \subset) איבר מקסימלי, נסמנו ב- B .

היות ו- $B \ni \mathbb{P}$, כמובן מתקיים כי B שרשרת ב- $(A, <)$. נשים לב כי B מקסימלית שכן, אם קיים $a \in B \setminus A$, כך ש- $B \cup \{a\}$ שרשרת, הרי ש- $B \cup \{a\}$ שייך ל- (\mathbb{P}, \subset) , ומקיים $B \subset B \cup \{a\}$, בסתירה למקסימליות של B ב- (\mathbb{P}, \subset) .

2 \Leftarrow 3: נניח A קבוצה כלשהי.

אם A ריקה, אז (A, \emptyset) סדר טוב וסיימנו.

נניח כעת כי A לא ריקה. נתבונן באוסף כל הפונקציות החח"ע מסודר כלשהו ל- A :

$$P := \{f : \alpha \xrightarrow{1-1} A \mid \alpha \in \text{On}\} = \{f : \alpha \xrightarrow{1-1} A \mid \alpha \in H(A)\}$$

אז (P, \subset) סדורה חלקית², ולכן יש לה שרשרת מקסימלית, נסמנה ב- G .

משיקולים שכבר פגשנו מספר פעמים, $g := \bigcup G$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מסודר כלשהו δ ל- A . נשים לב כי אם $g : \delta \rightarrow A$ איננה על, אז ניתן לבחור איזשהו $a \in A$ שאיננו בתמונת g , ואז

$$g' := g \cup \{(\delta, a)\}$$

תהווה פונקציה חד-חד-ערכית מ- $\delta + 1$ ל- A , ומתקיים $P \setminus G \ni g'$.

אך אז $G \cup \{g'\}$ שרשרת המרחיבה את G , בסתירה למקסימליות של G .

סה"כ קיבלנו כי $A \leftrightarrow \delta$ $g : \delta \leftrightarrow A$ חד-חד-ערכית ועל. כעת נגדיר יחס $<_W$ על A , על-ידי הכלל:

$$a <_W b \iff g^{-1}(a) \in g^{-1}(b)$$

אז g איזומורפיזם שומר סדר מ- (δ, \in) ל- $(A, <_W)$, ובפרט $(A, <_W)$ סדר טוב.

3 \Leftarrow 4: נניח \mathcal{S} קבוצה של קבוצות, ו- $\bigcup \mathcal{S}$ לא ריקה. יהי $<_W$ סידור טוב של $\bigcup \mathcal{S}$.

נגדיר $f := \{(X, \min(X, <_W)) \mid X \in \mathcal{S}, X \neq \emptyset\}$. ישנן שתי אפשרויות:

◀ אם $\emptyset \notin \mathcal{S}$, אז $f : \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ פונקציית בחירה, וסיימנו.

◀ אם $\emptyset \in \mathcal{S}$, אז נבחר איבר שרירותי $a \in \bigcup \mathcal{S}$, ונסיק כי $f \cup \{(\emptyset, a)\}$ פונקציית בחירה כנדרש.

4 \Leftarrow 1: נניח (A, \triangleleft) קס"ח לא ריקה, וכל שרשרת ב- (A, \triangleleft) חסומה ב- (A, \triangleleft) . נבקש למצוא איבר מקסימלי.

תהי $A \rightarrow \mathcal{P}(A) : c \rightarrow c(X) \in X$ פונקציית בחירה, כלומר $c(X) \in X$ לכל תת-קבוצה לא ריקה X של A .

יהי θ סודר כך שאין פונקציה חד-חד-ערכית מ- θ ל- A . למשל, $\theta := H(A)$.

נסמן $P := \text{Par}(\theta, A)$, ונגדיר $F : P \rightarrow A$ כדלקמן.

לכל $g \in P$, נתבונן בקבוצת האיברים ב- A הגדולים מכל איברי תמונת g :

$$U_g := \{b \in A \mid \forall \alpha \in \text{dom}(g)(g(\alpha) \triangleleft b)\}$$

ואז:

$$F(g) := \begin{cases} c(U_g), & U_g \neq \emptyset; \\ c(A), & U_g = \emptyset. \end{cases}$$

כעת, ממשפט ההגדרה ברקורסיה, קיימת פונקציה

$$G : \theta \rightarrow A$$

כך שלכל $\beta > \theta$:

$$G(\beta) = F(G \upharpoonright \beta)$$

מבחירת θ נובע כי G איננה חח"ע.

יהי לכן $\gamma > \theta$ הסודר הקטן ביותר עבורו קיים $\gamma > \beta$ כך ש- $G(\gamma) = G(\beta)$. בפרט $G \upharpoonright \gamma$ חח"ע.

²הסדר \subset מתלכד עם הסדר $<$ שהגדרנו לטובת הוכחת משפט קנטור בשיעור הראשון.

תת-טענה 2: התמונה של $G \upharpoonright \gamma$ היא שרשרת ב- (A, \triangleleft) .

הוכחה: נניח a, b איברים שונים בתמונה של $G \upharpoonright \gamma$.

יהי α, β סודרים ב- γ כך ש- $a = G(\alpha)$ ו- $b = G(\beta)$. בה"כ $\alpha < \beta$. כזכור:

$$G(\beta) = F(G \upharpoonright \beta) = \begin{cases} c(U_{G \upharpoonright \beta}), & U_{G \upharpoonright \beta} \neq \emptyset; \\ c(A), & U_{G \upharpoonright \beta} = \emptyset. \end{cases}$$

◀ אם $U_{G \upharpoonright \beta}$ לא ריקה, הרי ש- $U_{G \upharpoonright \beta} \ni G(\beta)$, ובפרט $a = G(\alpha) \triangleleft G(\beta) = b$.

◀ אם $U_{G \upharpoonright \beta}$ ריקה, אז $G(\beta) = c(A) = c(U_\emptyset) = G(0)$ בסתירה לכך ש- $G \upharpoonright \gamma$ ח"ע ו-

$$0 \leq \alpha < \beta < \gamma$$

סה"כ, קיבלנו כי a, b אכן בנייהשוואה ביחס ל- \triangleleft .

מש"ל תת-טענה 2

כעת, כיוון שכל שרשרת ב- (A, \triangleleft) היא חסומה ב- (A, \triangleleft) , נוכל לקבוע $A \ni a$ כלשהו כך שלכל $\gamma > \beta$:

$$G(\beta) = a \text{ או } G(\beta) \triangleleft a.$$

תת-טענה 3: a מקסימלי ב- (A, \triangleleft)

הוכחה: אחרת, קיים $A \ni b$ המקיים $a \triangleleft b$, ומטרנזיטיביות של \triangleleft ובחירת a , נקבל כי לכל $\gamma > \beta$:

$$G(\beta) \triangleleft b$$

כלומר, b מעיד כי $U_{G \upharpoonright \gamma}$ לא ריקה, ואז $G(\gamma) = c(U_{G \upharpoonright \gamma})$. בפרט, $G(\beta) \triangleleft G(\gamma)$ לכל $\gamma > \beta$.

התקבל כי $G(\beta) \neq G(\gamma)$ לכל $\gamma > \beta$, בסתירה לבחירת γ .

מש"ל תת-טענה 3

■

הראנו כי ב- (A, \triangleleft) יש איבר מקסימלי, כמבוקש.

טענה 5.13 (Hartogs, 1915) התנאים הבאים שקולים:

1. לכל שתי קבוצות לא ריקות X, Y לפחות אחד מהבאים מתקיים:

(א) קיימת $f : X \rightarrow Y$ חד-חד-ערכית.

(ב) קיימת $f : Y \rightarrow X$ חד-חד-ערכית.

2. עקרון הסדר הטוב של צרמלו.

הוכחה: $1 \Leftrightarrow 2$: נניח A קבוצה לא ריקה. יהי $\theta := H(A)$ מספר הרטוגס שלה. בפרט, לא קיימת פונקציה חד-חד-ערכית מ- θ ל- A . אז מההנחה, נובע כי קיימת בהכרח פונקציה ח"ע $f : A \rightarrow \theta$.

נגדיר יחס $<_W$ על A , על-ידי הכלל:

$$a <_W b \iff f(a) \in f(b)$$

אז $<_W$ סידור טוב של A , כמבוקש.

$1 \Leftrightarrow 2$: נסדר את $X \cup Y$ בסדר טוב כלשהו $<_W$. יהי $\alpha := \text{otp}(X, <_W)$ ו- $\beta := \text{otp}(Y, <_W)$.

אז α, β סודרים, וקיימות בפרט פונקציות ח"ע ועל X ועל Y ו- $g_X : \alpha \leftrightarrow X$ ו- $g_Y : \beta \leftrightarrow Y$.

היות ו- α, β סודרים, מתקיים אחד משניים:

◀ $\alpha < \beta$. במקרה זה, $g_Y \circ g_X^{-1}$ פונקציה חח"ע מ- X ל- Y .

◀ $\beta \leq \alpha$. במקרה זה, $g_X \circ g_Y^{-1}$ פונקציה חח"ע מ- Y ל- X .

■

מסקנה 5.14 אקסיומת הבחירה שקולה לכך שלכל שתי קבוצות X, Y מתקיים $|X| \leq |Y|$ או $|Y| \leq |X|$.

נספח - תוספת על אקסיומת הבחירה

קודם לכן הראנו כי עקרון הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה, וכן הוכחנו את הגרירה בכיוון ההפוך. אולם ההוכחה היתה עקיפה. כעת נציג הוכחה ישירה.

הוכחה: נניח A קבוצה לא ריקה. נבקש למצוא סידור טוב שלה. תהי $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$, פונקציה בחירה.

יהי $H(A) := \theta$ מספר הרטוגס של A . תהי P קבוצת כל הפונקציות החלקיות מ- θ ל- A .

נגדיר $F: P \rightarrow A$ ע"י הכלל:

$$F(g) := f(A \setminus \text{Im}(g))$$

ממשפט ההגדרה ברקורסיה, נקבל פונקציה $G: \theta \rightarrow A$ המכבדת את F .

כיוון ש- $\theta = H(A)$, הפונקציה G איננה חח"ע. יהי לכן $\gamma > \theta$ הסודר הראשון כך שקיים $\gamma > \beta$ עבורו $G(\beta) = G(\gamma)$.

אם $A \setminus G[\gamma]$ איננה ריקה, הרי שמהגדרת F והעובדה ש- f פונקציה בחירה נקבל

$$G(\gamma) = f(A \setminus \text{Im}(G \upharpoonright \gamma)) \in A \setminus G[\gamma]$$

בסתירה לכך ש- $G(\gamma) = G(\beta) \in G[\gamma]$.

נובע לכן כי $G[\gamma] = A$, ומכאן כי $G \upharpoonright \gamma$ היא פונקציה חח"ע מהסודר γ על A , ובכך משרה סדר טוב על A (מטיפוס סדר γ).

■

תרגיל 5.15 הוכיחו באינדוקציה כי אם \mathcal{S} קבוצה סופית לא ריקה, אז קיימת ל- \mathcal{S} פונקציית בחירה.

כעת ניגש לטפל במשפט טיכונוף.

נזכיר כי מבנה (X, τ) הוא מרחב טופולוגי אמ"מ הבאים מתקיימים:

$$1. \mathcal{P}(X) \supseteq \tau \supseteq \{X, \emptyset\}$$

$$2. \text{אם } \tau \supseteq \mathcal{U} \text{ אז } \tau \supseteq \bigcup \mathcal{U}$$

$$3. \text{אם } \tau \supseteq \mathcal{U} \text{ סופית, אז } \tau \supseteq \bigcap \mathcal{U}$$

הגדרה 5.16 עבור מרחב טופולוגי (X, τ) , \mathcal{U} נקראת כיסוי פתוח אם $X = \bigcup \mathcal{U}$ ו- $\tau \supseteq \mathcal{U}$.

(X, τ) נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\tau \supseteq \mathcal{U}$ קיימת $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{V}$ סופית המהווה כיסוי פתוח.

טופולוגיית המכפלה: נניח $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ מרחבים טופולוגיים.

מרחב המכפלה של הקבוצה הנ"ל הוא המרחב (\mathbb{P}, τ) , כאשר:

$$\mathbb{P} := \{f: I \rightarrow \bigcup_i X_i \mid \forall i \in I f(i) \in X_i\}$$

ו- τ היא הטופולוגיה הגסה ביותר עבורה לכל $i \in I$, ההטלה $\pi_i: \mathbb{P} \rightarrow X_i$ המוגדרת ע"י

$$\pi_i(f) := f(i)$$

היא רציפה. כלומר, לכל $i \in I$ ולכל $G \in \tau_i$, דורשים כי $\pi_i^{-1}[G]$ שייך ל- τ .

משפט 5.17 (משפט טיכונוף)

מכפלה כלשהי של מרחבים טופולוגיים קומפקטיים היא קומפקטית.

המשפט הוכח ע"י Tychonoff ב-1935 תוך הסתמכות על אקסיומת הבחירה. ב-1950, Kelley הוכיח כי ה"משפט" בעצם שקול לאקסיומת הבחירה (מעל מערכת האקסיומות של ZF). נציג כעת הוכחה למשפטו של קלי.

הוכחה: נניח S קבוצה המקיימת $\bigcup S \neq \emptyset$. נבקש למצוא פונקציית בחירה עבור S . נגדיר $S := S \setminus \{\emptyset\}$. אז מספיק למצוא פונקציה $f : S \rightarrow \bigcup S$ כך ש- $f(X) \in X$ לכל $X \in S$.

תהי m קבוצה כלשהי כך ש- $X \ni m$ לכל $X \in S$. למשל $m := S$.

נגדיר $\bar{X} := X \cup \{m\}$, ו- $\tau_{\bar{X}} := \{\emptyset, \bar{X}, \{m\}, X\}$.

אז $(\bar{X}, \tau_{\bar{X}})$ מרחב טופולוגי קומפקטי מהסיבה הטריטוריאלי של $\tau_{\bar{X}}$ סופית.

יהי (\mathbb{P}, τ) מרחב המכפלה של $\{(\bar{X}, \tau_{\bar{X}}) \mid X \in S\}$.

לכל $X \in S$, נתבונן בקבוצה

$$U_X := \{g \in \mathbb{P} \mid g(X) = m\}$$

תכונות:

• U_X איננה ריקה שכן הפונקציה הקבועה $g : S \rightarrow \{m\}$ שייכת ל- U_X .

• $U_X = \pi_X^{-1}(\{m\})$

כיוון ש- $\{m\}$ פתוחה ב- $(\bar{X}, \tau_{\bar{X}})$, נסיק שה"כ כי הקבוצה הלא-ריקה U_X פתוחה ב- (\mathbb{P}, τ) .

תת-טענה: אם $S \supseteq A$ סופית, אז $\{U_X \mid X \in A\}$ איננה כיסוי של \mathbb{P} .

הוכחה: כיוון ש- A סופית, נוכל לקחת פונקציית בחירה $f : A \rightarrow \bigcup A$. כלומר, $f(X) \in X$ לכל $X \in A$.

נגדיר נקודה g במרחב המכפלה \mathbb{P} על-ידי הכלל

$$g(X) := \begin{cases} f(X), & X \in A; \\ m, & X \in S \setminus A. \end{cases}$$

לכל $X \in A$, מתקיים $g(X) = f(X) \in X$, ובפרט $g(X) \neq m$. לכן $g(X) \notin U_X$.

סה"כ $g \in \mathbb{P} \setminus \bigcup_{X \in A} U_X$, ובפרט $\{U_X \mid X \in A\}$ איננו כיסוי של \mathbb{P} .

מש"ל תת-טענה

היות ו- (\mathbb{P}, τ) קומפקטי, וכל תת-משפחה סופית של $\{U_X \mid X \in S\}$ איננה כיסוי, נובע כי המשפחה כולה $\{U_X \mid X \in S\}$ איננה כיסוי. תהי לכן $f \in \mathbb{P} \setminus \bigcup_{X \in S} U_X$. לכל $X \in S$ מתקיים:

• $f(X) \in \bar{X}$ ולכן $f \in U_X$.

• $f(X) \neq m$ ולכן $f \notin U_X$.

• $\bar{X} = X \cup \{m\}$.

סה"כ $f(X) \in X$ לכל $X \in S$, פונקציית בחירה כמבוקש.

³מאקסיומת היסוד לא יתכן $S \ni X \ni S$. נראה בהרצאה הבאה.