תורת הקבוצות האקסיומטית

השפה של תורת הקבוצות מורכבת משני יחסים בינאריים $=$ ו- $\in$, מקשרים לוגיים $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ וכמתים $\exists!, \exists, \forall$.[1]

נהוג לכתוב $A \subseteq B$ כקיצור ל- $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$.

האקסיומות של צרמלו-פרנקל $(\mathbf{ZF})$

1. **אקסיומת הקבוצה הריקה**

$$\exists A \forall x\, \neg (x \in A)$$

במילים פשוטות: קיימת קבוצה ללא איברים.

בפרט: קיימת קבוצה כלשהי.

2. **אקסיומת ההיקפיות** $(\boldsymbol{Extensionality})$

$$\forall A \forall B\, [(\forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B)) \leftrightarrow (A = B)]$$

במילים פשוטות: שתי קבוצות שוות אמ"מ יש להן אותם איברים בדיוק.

דרך אחרת לכתיבה:

$$\forall A \forall B\, [(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \leftrightarrow (A = B)]$$

מאקסיומות 1 ו-2 נובע הקיום והיחידות של הקבוצה הריקה. נסמנה ב-$\emptyset$.

3. **אקסיומת הצירוף** $(\boldsymbol{pairing})$

$$\forall x \forall y\, \exists A \forall z\ \ (z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

במילים פשוטות: אם x, y קבוצות, אז גם $\{x, y\}$ קבוצה.

בפרט (עבור $x = y$) נובע כי $\{x\}$ קבוצה, ואז לכל קבוצות x, y, גם $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ קבוצה, וזהו הזוג הסדור (x, y).[2]

4. **אקסיומת האיחוד** $(\boldsymbol{union})$

$$\forall F \exists A \forall x\, [x \in A \leftrightarrow \exists y\, (y \in F \wedge x \in y)]$$

במילים פשוטות: אם F קבוצה, אז גם $\{x \mid \exists y \in F,\ x \in y\}$ קבוצה. נהוג לסמנה ב- $\bigcup F$.

כאשר $F = \{A, B\}$, נהוג לסמן $A \cup B$ במקום $\bigcup F$.

---

[1] הכמת $\exists!$ מביע כי קיים ביחידות איבר. ניתן לקבל אותו גם מהכמתים האחרים.

[2] תזכורת: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. הגדרה זו מקיימת את הדרישה: $(x, y) = (a, b) \iff ((x = a) \wedge (y = b))$.
שימו לב כי במימוש הנ"ל, אם $a \neq b$, אז $a = \bigcup \bigcap (a, b)$ ו- $b = \bigcup (\bigcup (a, b) \setminus \bigcap (a, b))$.

אקסיומת הקבוצה הריקה (אקסיומה 1), אקסיומת הצירוף (אקסיומה 3) ואקסיומת האיחוד (אקסיומה 4) מספיקות להגשמת כל מספר טבעי:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\} \\ 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. **אקסיומת החזקה** $(power\ set)$

$$\forall A\, \exists P\, \forall x\, (x \in P \leftrightarrow x \subseteq A)$$

במילים פשוטות: אם A קבוצה אז גם $\{x \mid x \subseteq A\}$ קבוצה. נהוג לסמנה ב־ $\mathcal{P}(A)$.

6. **סכמת ההפרדה** $(Seperation)$

לכל נוסחא φ בשפה של תורת הקבוצות בעלת לפחות משתנה חופשי אחד מקצים אקסיומה כדלקמן:

נניח $v_0, ..., v_n$ כל המשתנים החופשיים של φ, אז האקסיומה היא:

$$\forall A \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists B \forall y \left[y \in B \leftrightarrow (y \in A \wedge \varphi(y, x_1, ..., x_n)) \right]$$

במילים פשוטות: אם A קבוצה, φ "תכונה" עם פרמטרים, אז אוסף כל האברים בתוך A המקיימים φ היא גם כן קבוצה:

$B = \{y \in A \mid \varphi(y, x_1, ..., x_n)\}$.

הערה: אקסיומה זו מאפשרת להפריד איברים מתוך הקבוצה A, היינו, מבודדים רק את אלה מקרב A המקיימים את הפסוק φ. למשל, $B := \{y \in A \mid y \text{ סודר}\}$.

שימו לב כי לקבוצה A תפקיד מכריע. בלעדיה, היינו יכולים לכאורה לקבוע כי $\{y \mid y \text{ סודר}\}$ היא קבוצה, בעוד שראינו בהרצאה 2 כי היא איננה.

מאקסיומת הצירוף (אקסיומה 3), אקסיומת האיחוד (אקסיומה 4), אקסיומת החזקה (אקסיומה 5) וסכמת ההפרדה (אקסיומה 6) נובע כי אם A, B קבוצות, אז גם $A \times B$ קבוצה:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

שכן:

$$A \times B = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid z = (x,y)\,,\ x \in A, y \in B\}$$

מאקסיומת האיחוד (אקסיומה 4) וסכמת ההפרדה (אקסיומה 6) נובע כי אם F קבוצה לא־ריקה אז גם $\bigcap F$ קבוצה (מפעילים הפרדה על האיחוד).

הערה:

אם $(A,<)$ קס"ח ו־$a \in A$, אז גם $a_\downarrow$ קבוצה. אכן, נתבונן בנוסחא עם שלושה משתנים חופשיים:

$$\varphi(v_0, v_1, v_2) \overset{def}{=} (v_0, v_1) \in v_2$$

ואז:

$$a_\downarrow = \{y \in A \mid \varphi(y, a, <)\}$$

צריך את הפרמטר השלישי (יחס הסדר $<$) כדי להגדיר את הרישא.

7. **אקסיומת האינסוף** (*infinity*)

$$\exists A\left(\emptyset\in A\wedge\forall x\left(x\in A\rightarrow x\cup\{x\}\in A\right)\right)$$

במילים פשוטות: קיימת קבוצה המכילה את הקבוצה הריקה (כאיבר) והסגורה תחת פעולת "לקיחת עוקב" (אם האיבר נמצא אז גם העוקב שלו נמצא).

קבוצה כזו נקראת אינדוקטיבית והיא איננה סופית.

הערה:
אם A קבוצה אינדוקטיבית, אז מאקסיומת החזקה (אקסיומה 5) וסכמת ההפרדה (אקסיומה 6) גם:

$$I(A):=\{B\in\mathcal{P}(A)\mid B\text{ אינדוקטיבית}\}$$

היא קבוצה, ואז $\bigcap I\left(A\right)$ גם כן קבוצה.
חיתוך אינדוקטיביות היא אינדוקטיבית, לכן גם $\bigcap I\left(A\right)$ אינדיקטיבית ונסמנה $\omega(A)$.
אם A' אינדוקטיבית אחרת, אז $A\cap A'\in I\left(A\right)$.
לכן: $\omega(A')\in I\left(A\right)$, ומכאן $\omega(A)\subseteq\omega(A')$.
באופן סימטרי $\omega(A')\subseteq\omega(A)$.
ראינו כי קיום קבוצה אינדוקטיבית A כלשהי גורר קיום קבוצה אינדוקטיבית המוכלת בכל אינדוקטיבית אחרת. קבוצה זו מסומנת ב־ ω.

8. **סכמת ההחלפה** (*replacement*)

לכל נוסחא φ בשפה של תורת הקבוצות בעלת לפחות שני משתנים חופשיים מקצים אקסיומה כדלקמן:

נניח $v_0,...,v_n$ כל המשתנים החופשיים של φ. האקסיומה היא:

$$\forall A\forall x_2\cdots\forall x_n\left[\left(\forall x\in A\exists!y\,\varphi\left(x,y,x_2,...,x_n\right)\right)\rightarrow\left(\exists B\forall y\left(\left(y\in B\right)\leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge\varphi(x,y,x_2,...,x_n))\right)\right)\right]$$

במילים פשוטות: אם A קבוצה, φ "תכונה" המשרה פונקציה f על A, אז תמונתה ביחס לקבוצה A

$$B=\{f(a)\mid a\in A\}$$

היא גם כן קבוצה.

הערה:
מדוע אנו דורשים כי φ תשרה יחס של פונקציה על A בניגוד ליחס כלשהו?
כי זה יתן אקסיומה חזקה מדי. למשל, במקרה כזה, נוכל להגדיר יחס $\varphi(v_0,v_1)$ המביע כי v_1 סודר, ונאלץ להסיק כי O היא קבוצה.

סכמת ההחלפה היא המפתח להוכחת קיומו של $H(A)$ עבור קבוצה A. נראה זאת בשיעור הבא.

9. **אקסיומת היסוד** (*regularity*)

$$\forall S\left(\left(S\neq\emptyset\right)\rightarrow\exists x\in S\forall y\in S\,\neg\left(y\in x\right)\right)$$

במילים פשוטות: לכל קבוצה לא ריקה יש איבר מינימלי ביחס ל־ $\in$.

הערה:
נובע כי לכל קבוצה A לא מתקיים $A\in A$.
אכן, אם A קבוצה, אז מאקסיומת הצירוף (אקסיומה 3) גם $S=\{A\}$ קבוצה.
מאחר והקבוצה S לא ריקה, נקבל $x\in S$ כך שלכל $y\in S$, מתקיים $\neg(y\in x)$.
אבל S מכילה איבר אחד, A, ולכן $\neg(A\in A)$.

מערכת אקסיומות ZFC

מערכת אקסיומות ZF בתוספת אקסיומת הבחירה.[3]

עוד על אקסיומת הבחירה

טענה 6.1 התנאים הבאים שקולים (ב- ZF)

1. אם $\mathcal{S} \neq \emptyset$ לא ריקה, וגם $\emptyset \notin \mathcal{S}$, אז קיימת $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ כך ש- $f(X) \in X$ לכל $X \in \mathcal{S}$.
2. אקסיומת הבחירה.
3. אם $\sim$ יחס שקילות על קבוצה לא ריקה A, אז קיימת Z המהווה קבוצת נציגים עבור $(A, \sim)$.
   כלומר:
   (א) לכל $a \in A$ קיים $z \in Z$ כך ש- $z \sim a$.
   (ב) לכל x, y שונים ב- Z, $\neg (x \sim y)$.

הוכחה: $\underline{1 \Leftarrow 2}$: נניח נתונה $\mathcal{S}$ כך ש-$\bigcup \mathcal{S} \neq \emptyset$. נבקש למצוא $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ כך ש- $f(X) \in X$ לכל $X \in \mathcal{S}$ לא ריקה.

אם $\emptyset \not\in \mathcal{S}$, אז סיימנו. אחרת, תהי $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$.

מאחר ומתקיים כי $\bigcup \mathcal{S}' = \bigcup \mathcal{S}$ לא ריקה, נובע כי $\mathcal{S}' \neq \emptyset$, ולכן קיימת $f' : \mathcal{S}' \to \bigcup \mathcal{S}'$ עבורה $f'(X) \in X$ לכל $X \in \mathcal{S}'$.

יהי a איבר כלשהו ב- $\mathcal{S}'$, אז $f := f' \cup \{(\emptyset, a)\}$ כנדרש.

$\underline{2 \Leftarrow 3}$: נתבונן בקבוצת המנה

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= {}^{A}/_{\sim} \\ &= \{[x]_\sim \mid x \in A\} \\ &= \{\{a \in A \mid a \sim x\} \mid x \in A\} \end{aligned}$$

מאחר ו-$\bigcup \mathcal{S} = A \wedge A \neq \emptyset$, נוכל למצוא פונקציית בחירה $f : \mathcal{S} \to A$.

נסמן: $Z := \mathrm{Im}(f)$ ונוודא כי היא כמבוקש:

1. בהנתן $a \in A$, יהי $z := f([a]_\sim)$. אז $z \in \mathrm{Im}(f) = Z$.
   כיוון ש-f פונקציית בחירה, מתקיים גם $z \in [a]_\sim$. כלומר, מצאנו $z \in Z$ כך ש- $z \sim a$.
2. נניח $x, y \in Z$ עבורם $x \sim y$. אז $[x]_\sim = [y]_\sim$, ולכן $x = f([x]_\sim) = f([y]_\sim) = y$.

כלומר, Z קבוצת נציגים כמבוקש.

$\underline{3 \Leftarrow 1}$: נניח $\mathcal{S}$ קבוצה לא ריקה כלשהי. נסמן:

$$\begin{aligned} A &:= \{\{X\} \times X \mid X \in \mathcal{S}\} \\ &= \{(X, a) \mid X \in \mathcal{S}, a \in X\} \end{aligned}$$

כעת נגדיר יחס שקילות $\sim$ על A:

$$(Y, b) \sim (X, a) \iff X = Y$$

תהי Z קבוצת נציגים עבור $(A, \sim)$.

אז $Z : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ פונקציית בחירה. כלומר, מקיימת $Z(X) \in X$ לכל $X \in \mathcal{S}$. ■

[3] אקסיומת הבחירה: אם $\mathcal{S}$ קבוצה של קבוצות ו-$\bigcup \mathcal{S} \neq \emptyset$, אז קיימת $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ המקיימת $f(X) \in X$ לכל $X \in \mathcal{S}$ לא ריקה.

תזכורת מהקורס "מתמטיקה בדידה"

- מונה $\mathfrak{a}$ היא מחלקה לא ריקה של קבוצות עם התכונה שלכל $A \in \mathfrak{a}$ וכל קבוצה B מתקיים

$B \in \mathfrak{a}$ אמ"מ קיימת פונקציה חח"ע מ-A על B.

- לקבוצה A, מסמנים ב-$|A|$ את המונה היחיד $\mathfrak{a}$ המקיים $A \in \mathfrak{a}$.
בפרט, לקבוצות A, B מתקיים $|A| = |B|$ אמ"מ קיימת פונקציה חח"ע מ-A על B.
- במקרה בו מונה $\mathfrak{a}$ מכיל סודר, נהוג לזהות את $\mathfrak{a}$ עם הסודר הקטן ביותר השייך ל-$\mathfrak{a}$.
- למונים $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, כותבים $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ אמ"מ לכל $A \in \mathfrak{a}$ ו-$B \in \mathfrak{b}$ קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B.
בפרט, לקבוצות A, B מתקיים $|A| \leq |B|$ אמ"מ קיימת פונקציה פונקציה חח"ע מ-A ל-B.

משפט 6.2 (קנטור-ברנשטיין-דדקינד) נניח A, B קבוצות, אז $|A| = |B|$ אמ"מ $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$.

המשפט הנ"ל שוער ע"י קנטור ב-1895, והוכח ע"י ברנשטיין ב-1898. מסתבר שהוכח גם ע"י דדקינד ב-1887. המשפט נובע מ-ZF, ואינו מצריך את אקסיומת הבחירה.

תרגיל 6.3 נניח $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ מונים. הראו כי אם $\mathfrak{b}$ מכיל סודר, אז גם $\mathfrak{a}$ מכיל סודר.

הערה 6.4 ממשפט הרטוגס שהוכחנו לקראת סוף הרצאה 5, אקסיומת הבחירה שקולה לקביעה כי לכל שני מונים $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ מתקיים $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ או $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

תורת הגרפים

הגדרה 6.5 גרף הוא מבנה (V, E) כך ש-$E \subseteq [V]^2 := \{\{x, y\} \in \mathcal{P}(V) \mid x \neq y\}$.

הגדרה 6.6 צביעה טובה של גרף $G = (V, E)$ היא פונקציה $c : V \to A$ כך שלכל $\{x, y\} \in E$ מתקיים $c(x) \neq c(y)$.

הגדרה 6.7 המספר הכרומטי של גרף $G = (V, E)$, המסומן ב-$\chi(G)$, הוא המונה הקטן ביותר $\mathfrak{a}$ כך שקיימת צביעה טובה $c : V \to A$ עבור $A \in \mathfrak{a}$ כלשהו.

תרגיל 6.8 לכל גרף $G = (V, E)$ מתקיים $\chi(G) \leq |V|$.

הגרף של סויפר ושלח (2003). נתבונן בגרף $G = (\mathbb{R}, E)$ כאשר $\{x, y\} \in E$ אמ"מ $x \neq y$ ו-$(x - y \pm \sqrt{2})$ רציונלי.

טענה 6.9 במערכת האקסיומות ZFC, המספר הכרומטי של G הנ"ל הוא 2.

הוכחה: ברור כי המספר הכרומטי איננו קטן מ-2. יהי $\sim$ הסגור הטרנזיטיבי של E, כלומר $x \sim y$ אמ"מ קיימים $q \in \mathbb{Q}$ ו-$z \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$x - y = q + z\sqrt{2}.$$

זהו יחס שקילות. מאקסיומת הבחירה והטענה שראינו היום, תהי Z קבוצת נציגים עבור $(\mathbb{R}, \sim)$. לכל $x \in \mathbb{R}$, יהי $\bar{x} \in Z$ היחיד המקיים $\bar{x} \sim x$. בפרט, קיים ביחידות $z \in \mathbb{Z}$ כך ש-$(x - \bar{x} - z\sqrt{2})$ רציונלי. אם z זוגי, נצבע $c(x) := 0$. אחרת, נצבע $c(x) := 1$.

כדי להראות כי c טובה, נניח $\{x, y\} \in E$ כלשהי ונראה $c(x) \neq c(y)$. יהי $q \in \mathbb{Q}$ כך ש- $x - y - \sqrt{2} = q$. אז $x \sim y$ ולכן $(x - \bar{x}) - (y - \bar{y}) = x - y = q + \sqrt{2}$. מכאן כי $c(x) \neq c(y)$. ■

במאמר פורץ דרך משנת 1970, Solovay בנה מודל של ZF בו כל תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ היא מדידת לבג.

טענה 6.10 במודל של Solovay, המספר הכרומטי של הגרף של סויפר ושלח איננו בן-מניה.

הוכחה: נניח אחרת, ותהי $c:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ צביעה טובה. נסמן $A_n := \{x\in\mathbb{R} \mid c(x)=n\}$. ממהנחה, A_n מדידה.

היות ומידת לבג היא סיגמא-אדיטיבית, ו-$\mathbb{R}=\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$, נוכל למצוא $n\in\mathbb{N}$ כך ש-A_n ממידה חיובית. בפרט, קיים אינטרוול I כך ש-

$$\frac{\lambda(A_n\cap I)}{\lambda(I)} > \frac{9}{10}.$$

יהי q^* מספר רציונלי בקטע הפתוח $(\sqrt{2}, \sqrt{2}+\frac{1}{10\cdot \mathrm{Diam}(I)})$. נסמן

$$B := \{x - q^* + \sqrt{2} \mid x\in A_n\}.$$

אז

$$\frac{\lambda(B\cap I)}{\lambda(I)} > \frac{8}{10}.$$

בפרט $A_n\cap B$ לא ריקה. נקח $x\in A_n\cap B$ כלשהו ונגדיר $y := x + q^* - \sqrt{2}$.

כיוון ש-$x\in B$, מתקיים $y\in A_n$. אז $c(x)=n=c(y)$, בסתירה לכך ש-$\{x,y\}\in E$. ■

הגדרה 6.11 הגרף השלם על קבוצה X הוא הגרף $\mathcal{K}_X := (X, [X]^2)$.

תרגיל 6.12 כל צביעה טובה של הגרף השלם היא חח"ע.

הגדרה 6.13 בהנתן שני גרפים $G_0=(V_0,E_0)$ ו-$G_1=(V_1,E_1)$, מגדירים את גרף המכפלה $G_0 * G_1$ באופן הבא:

- $V(G_0*G_1) = V_0\times V_1$;
- $E(G_0*G_1) = \{\{(g_0,g_1),(g_0',g_1')\} \mid (g_0,g_0')\in E_0 \wedge (g_1,g_1')\in E_1\}$.

תרגיל 6.14 הראו כי לכל שני גרפים G_0,G_1 מתקיים $\chi(G_0*G_1)\le\chi(G_0)$ וגם $\chi(G_0*G_1)\le\chi(G_1)$.

השערה (Hedetniemi, 1966). לכל שני גרפים G_0,G_1 מתקיים $\chi(G_0*G_1)=\min\{\chi(G_0),\chi(G_1)\}$.

הערה 6.15 ההשערה עדיין פתוחה למקרה בו G_0,G_1 גרפים סופיים.

הגרף של Galvin ו-Komjáth (1991). בהנתן קבוצה X, מגדירים גרף $\mathcal{L}_X := \mathcal{K}_X * \mathcal{K}_{H(X)}$.[4]

שימו לב כי בגרף הנ"ל: קודקוד (x,α) מחובר לקודקוד (y,β) אמ"מ $x\neq y$ וגם $\alpha\neq\beta$.

טענה 6.16 מעל מערכת האקסיומות של ZF, הבאים שקולים:

1. עקרון הסדר הטוב.
2. לכל גרף יש מספר כרומטי.

הוכחה: $1\Leftarrow 2$: ההגדרה של מספר כרומטי דורשת קיומו של מונה מינימלי (בעל תכונה מסוימת). אבל עקרון הסדר הטוב גורר שכל מונה מכיל סודר, ומחלקת הסודרים הרי סדורה היטב. לכן, במקרה זה, גם מחלקת המונים סדורה היטב. אזי, קיומו של מונה מינימלי מובטח.

$2\Leftarrow 1$: נניח X קבוצה כלשהי. נבקש למצוא לה סידור טוב.

מההנחה, ל-$\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_{H(X)}$ ו-$\mathcal{L}_X$ יש מספר כרומטי.

נסמן $\theta := H(X)$ ו-$\mathfrak{a} := \chi(\mathcal{L}_X)$. תהי $c: X\times\theta\to A$ צביעה טובה של $\mathcal{L}_X$, כך ש-$A\in\mathfrak{a}$.

תת-טענה 1. לכל $x\in X$, הפונקציה $c\restriction(\{x\}\times\theta)$ איננה חח"ע.

הוכחה. אחרת, קיימת פונקציה חח"ע מ-θ ל-A.

היות ו-$\mathcal{L}_X$ הוא גרף המכפלה של $\mathcal{K}_X$ עם גרף נוסף, מקבלים מתרגילים 6.14 ו-6.8 כי $|X|\le\chi(\mathcal{K}_X)\le\mathfrak{a}$. בפרט, קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-X.

סה"כ, ע"י הרכבת פונקציות נסיק קיומה של פונקציה חח"ע מ-θ ל-X, בסתירה לבחירת θ.

[4] כפי שהוגדר בהרצאה 5, $H(X)$ הוא הסודר θ הקטן ביותר כך שלא קיימת העתקה חח"ע מ-θ ל-X.

מש"ל תת־טענה 1$\boxtimes$

כעת נגדיר פונקציה $f : X \to \theta \times A$ באופן הבא.

בהנתן $x \in X$, יהי $\beta < \theta$ הסודר הקטן ביותר כך שקיים $\alpha < \beta$ עבורם:

$$c(x, \alpha) = c(x, \beta)$$

ונגדיר $f(x) := (\beta, c(x, \beta))$ עבור β זה.[5]

תת־טענה 2. f חח"ע.

הוכחה. נניח בשלילה x, y איברים שונים ב־X ו־$f(x) = f(y)$.

נסמן $f(x) =: (\beta, i)$. מבחירת β, יהי $\alpha < \beta$ כך ש־

$$c(x, \beta) = c(x, \alpha).$$

התקבל

$$c(x, \alpha) = c(x, \beta) = i = c(y, \beta)$$

בסתירה לכך ש־c צביעה טובה של הגרף $\mathcal{L}_X$.

מש"ל תת־טענה 2$\boxtimes$

היות ו־$\mathcal{L}_X$ הוא גרף המכפלה של $\mathcal{K}_\theta$ עם גרף נוסף, מקבלים מתרגילים 6.14 ו־6.8 כי $|\theta| \leq \chi(\mathcal{K}_\theta) \leq \mathfrak{a}$. אז קיימת פונקציה חח"ע מ־A ל־θ, ולכן סה"כ, קיימת פונקציה חח"ע $f' : X \to \theta \times \theta$.

את הקבוצה $\theta \times \theta$ ניתן לסדר בסדר טוב (למשל, מילוני), ולכן הפונקציה החח"ע f' משרה על X סידור טוב, כמבוקש.

■

[5] ההגדרה טובה כי θ סודר.