

כזכור מהרצאה 5, לקבוצה  $A$  מגדירים:

$$.H(A) := \{\alpha \in \text{On} \mid \exists f : \alpha \xrightarrow{1-1} A\}$$

נראה היום כי אם  $A$  קבוצה, אז גם  $H(A)$  קבוצה.

**טענה 7.1** לקבוצה  $A$ , נסמן:

$$A' := \{(B, W) \mid B \subseteq A \text{ \& } W \text{ well-ordering of } B\} \bullet$$

$$A'' := \{\text{otp}(B, W) \mid (B, W) \in A'\} \bullet$$

אז  $A'' = H(A)$ .

**הוכחה:** נניח  $\alpha \in H(A)$ . תהי  $f : \alpha \rightarrow A$  פונקציה חח"ע. נגדיר

$$B := \text{Im}(f)$$

$$W := \{(x, y) \in B \times B \mid f^{-1}(x) \in f^{-1}(y)\}$$

אז  $B$  תת-קבוצה של  $A$ ,  $W$  סידור טוב של  $B$ , ו- $\text{otp}(B, W) = \alpha$  כי  $(B, W) \cong (\alpha, \in)$ . לכן  $\alpha \in A''$ .

בכיוון ההפוך: נניח  $\alpha \in A''$ . ניקח  $(B, W)$  תת-קבוצה של  $A$  ו- $W$  סידור טוב שלה, כך ש- $\text{otp}(B, W) = \alpha$ .

אז קיימת  $f : \alpha \leftrightarrow B$  חח"ע ועל שומרת סדר מ- $(\alpha, \in)$  ל- $(B, W)$ .

בפרט,  $f$  פונקציה חח"ע מ- $\alpha$  ל- $A$ , ו- $\alpha \in H(A)$ .

■

**טענה 7.2** קיימת נוסחה  $\varphi_0(v_0)$  כך ש- $\varphi_0(x)$  מתקיים אמ"מ  $x = \emptyset$ .

**הוכחה:**  $\forall y (\neg(y \in v_0))$ .

■

**טענה 7.3** קיימת נוסחה  $\varphi_1(v_0, v_1)$  כך ש- $\varphi_1(B, A)$  מתקיים אמ"מ  $B \subseteq A$ .

**הוכחה:**  $\forall y (y \in v_0 \rightarrow y \in v_1)$ .

■

**תרגיל 7.4** הראו כי קיימת נוסחה  $\varphi_2(v_0, v_1, v_2)$  כך ש- $\varphi_2(x_0, x_1, x_2)$  מתקיים אמ"מ  $x_2 = (x_0, x_1)$ .

**טענה 7.5** קיימת נוסחה  $\varphi_3(v_0, v_1)$  כך ש- $\varphi_3(x, y)$  מתקיים אמ"מ  $x$  סידור טוב של  $y$ .

**הוכחה:** יש להביע כי  $v_0$  יחס בינארי על  $v_1$  שהוא אנטי-רפלקסיבי, טרנזיטיבי, כך שלכל תת-קבוצה לא ריקה של  $v_1$  יש איבר ראשון לפי  $v_0$ . נעשה זאת כדלקמן:

$$\forall p ((p \in v_0) \rightarrow \exists a \exists b (a \in v_1 \wedge b \in v_1 \wedge \varphi_2(a, b, p))) \wedge$$

$$\forall a \forall p ((a \in v_1 \wedge \varphi_2(a, a, p)) \rightarrow \neg(p \in v_0)) \wedge$$

$$\forall a \forall b \forall c \forall x \forall y \forall z ((a \in v_1 \wedge b \in v_1 \wedge c \in v_1 \wedge \varphi_2(a, b, x) \wedge \varphi_2(b, c, y) \wedge \varphi_2(a, c, z) \wedge x \in v_0 \wedge y \in v_0) \rightarrow (z \in v_0)) \wedge$$

$$\forall a (\varphi_0(a) \vee \neg \varphi_1(a, v_1) \vee \exists c (c \in a \wedge \forall d ((d \in a \wedge \neg(d = c)) \rightarrow \exists p (\varphi_2(c, d, p) \wedge p \in v_0))))$$

■

**טענה 7.6** קיימת נוסחה  $\varphi_4(v_0)$  כך ש- $\varphi_4(x)$  מתקיים אמ"מ  $x$  סודר.

<sup>1</sup>כזכור, הזוג הסודר  $(x_0, x_1)$  מוגשם כ- $\{\{x_0\}, \{x_0, x_1\}\}$ .

**הוכחה:** יש להביע כי  $v_0$  טרנזיטיבית וסדורה היטב ע"י יחס השייכות. נעשה זאת כדלקמן:

$$\forall a \forall b ((a \in v_0 \wedge b \in a) \rightarrow (b \in v_0)) \wedge \\ \exists w (\forall p ((p \in w) \leftrightarrow \exists x \exists y (y \in v_0 \wedge x \in y \wedge \varphi_2(x, y, p))) \wedge \varphi_3(w, v_0))$$

■

**תרגיל 7.7** הראו כי קיימת נוסחה  $\varphi_5(v_0, v_1)$  כך ש- $\varphi_5(x, y)$  מתקיים אמ"מ  $x = (B, W)$ ,  $y$  סודר, וקיימת פונקציה חח"ע ועל מ- $B$  ל- $y$  המהווה איזומורפיזם סדר מ- $(B, W)$  ל- $(y, \in)$ .

**משפט 7.8** אם  $A$  קבוצה, אז גם  $H(A)$  קבוצה.

**הוכחה:** נניח  $A$  קבוצה. אז

$$A' := \{p \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A) \mid \exists B \exists W [\varphi_2(B, W, p) \wedge \varphi_1(B, A) \wedge \varphi_3(W, B)]\}$$

כפי שראינו בשיעור הקודם, היות ו- $A$  קבוצה, גם  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A)$  קבוצה. כעת, נפנה לסכמת ההפרדה עם הקבוצה  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A)$ , ונסיק כי  $A'$  קבוצה.

לבסוף, מאקסיומת ההחלפה, נקבל כי  $\{\alpha \mid \exists x \in A' [\varphi_5(x, \alpha)]\}$  קבוצה. אבל האחרונה היא  $A''$ , כלומר,  $H(A)$ , כמבוקש.

■

## מונים Cardinals

הערה: אנו מפתחים את המושגים בתוך המערכת  $ZFC^2$ .

**הגדרה 7.9** מונה הוא סודר  $\alpha$  כך שלכל סודר  $\beta$ ,  $\alpha > \beta$ , כל פונקציה  $f : \beta \rightarrow \alpha$  איננה חח"ע ועל.

ברור כי 0 ו-1 הם מונים. לעומת זאת, למשל,  $\omega + 1$  איננו מונה כי ניתן להגדיר פונקציית שקילות (כלומר חח"ע ועל)  $f : \omega \leftrightarrow \omega + 1$  על-ידי הכלל:

$$f(n) := \begin{cases} \omega, & n = 0 \\ n - 1, & n > 0 \end{cases}$$

מונים נהוג לסמן באותיות יווניות:  $\kappa, \lambda, \theta, \mu$ .

**הגדרה 7.10** לכל קבוצה  $A$ , נגדיר

$$|A| := \min\{\alpha \in \text{On} \mid \exists g : \alpha \leftrightarrow A\}$$

**טענה 7.11** לכל קבוצה  $A$ ,  $|A|$  מוגדר היטב, וזהו מונה.

**הוכחה:** מעקרון הסדר הטוב, הקבוצה:

$$\{\alpha \in \text{On} \mid \exists g : \alpha \leftrightarrow A\}$$

איננה ריקה. כיוון שמחלקת הסודרים סדורה היטב, יש לה איבר ראשון.<sup>3</sup>

נראה כי  $|A|$  מונה.

אכן, אם קיימים  $|A| > \beta$  ופונקציית שקילות  $f : \beta \leftrightarrow |A|$ , נוכל לקחת פונקציית שקילות  $g_A : |A| \leftrightarrow A$ , ותתקבל פונקציית שקילות  $g_A \circ f : \beta \leftrightarrow A$  בסתירה למינימליות של  $|A|$ .

■

**תרגיל 7.12** הראו:

<sup>2</sup>בהרצאה 6 נגענו קצת בפיתוח הכללי יותר במערכת ZF.  
<sup>3</sup>כזכור, הראנו כי אם  $B$  קבוצת סודרים, אז  $B \cap B$  הוא האיבר הראשון ב- $B$ .

1. אם  $(A, W)$  קבוצה סדורה היטב, אז  $|A| \leq \text{otp}(A, W)$ .

2. קבוצה  $A$  היא מונה אמ"מ  $|A| = A$ .

3. לכל שתי קבוצות  $A, B$ :  $|A| = |B|$  אמ"מ קיימת פונקציה שקילות  $g : A \leftrightarrow B$ .

**טענה 7.13** לכל שתי קבוצות  $A, B$ :  $|A| \leq |B|$  אמ"מ קיימת  $f : A \rightarrow B$  חח"ע.

**הוכחה:** ( $\Leftarrow$ ): תהי  $g_A : |A| \leftrightarrow A$  פונקציית שקילות. תהי  $g_B : |B| \leftrightarrow B$  פונקציית שקילות.

נניח  $|A| \leq |B|$ , ונגדיר  $f := g_B \circ (g_A)^{-1}$ .

אז  $f$  פונקציה חח"ע מ- $A$  ל- $B$ , ומוגדרת היטב כי  $\text{dom}(g_B) \supseteq \text{dom}(g_A) = \text{Im}(g_A^{-1})$ .

( $\Rightarrow$ ): נניח  $f : A \rightarrow B$  פונקציה חח"ע. תהי  $g_B : |B| \leftrightarrow B$  פונקציית שקילות.

אז  $f \circ (g_B)^{-1}$  פונקציה חח"ע מ- $A$  ל- $|B|$ . נסמן  $C := \text{Im}((g_B)^{-1} \circ f)$ . כמוכ,  $|A| = |C|$ . היות ו- $C$  תת-קבוצה של  $|B|$ , נקבל:

$$|A| = |C| \leq \text{otp}(C, \in) \leq \text{otp}(|B|, \in) = |B|$$

↓  
הרצאה 4

■

**מסקנה 7.14** (קנטור-ברנשטיין-דדקינד)

אם  $A, B$  קבוצות וקיימות  $f_1 : A \rightarrow B$  חד-חד-ערכיות, אז קיימת  $g : A \leftrightarrow B$  שקילות.

**הוכחה:** מהפונקציה  $f_1$  מקבלים  $|A| \leq |B|$ . מהפונקציה  $f_2$  מקבלים  $|B| \leq |A|$ .

כיוון ש- $|A|, |B|$  סודרים, הרי ש- $|A| = |B|$ .

אז מתרגיל 7.12, נובע כי קיימת  $g : A \leftrightarrow B$  שקילות.

■

**מסקנה 7.15** הבאים שקולים לכל שתי קבוצות  $A, B$ :

1.  $|A| < |B|$ .

2. קיימת פונקציה  $f : A \rightarrow B$  חח"ע, אך לא קיימת פונקציה  $g : B \rightarrow A$  חח"ע.

3. לא קיימת פונקציה  $g : B \rightarrow A$  חח"ע.

**הוכחה:** ( $2 \Leftarrow 1$ ): מ- $|A| < |B|$ , נקבל  $|A| \leq |B|$  ואז מטענה קודמת, קיימת  $f : A \rightarrow B$  חח"ע.

מאידך, אם הייתה קיימת  $g : A \rightarrow B$  חח"ע, אז ממסקנה 7.14,  $|A| = |B|$ , בסתירה להנחה.

( $3 \Leftarrow 2$ ): טריוויאלי.

( $1 \Leftarrow 3$ ): היות ו- $|A|, |B|$  סודרים, אז מכך שלא מתקיים  $|A| < |B|$ , נובע כי  $|B| \leq |A|$ . אבל אז, מטענה 7.13, קיימת  $g : B \rightarrow A$  חח"ע בסתירה להנחה.

■

**טענה 7.16** לכל קבוצה  $A$ ,  $H(A)$  מונה.

**הוכחה:** נניח בשלילה כי  $H(A)$  לא מונה, ונקבע  $\alpha < H(A)$  ביחד עם פונקציית שקילות  $g : \alpha \leftrightarrow H(A)$ .

כיוון ש- $\alpha < H(A)$ , קיימת  $f : \alpha \rightarrow A$  חח"ע, ומכאן כי  $f \circ g^{-1}$  פונקציה חח"ע מ- $H(A)$  ל- $A$  בסתירה להגדרת  $H(A)$ .

■

**מסקנה 7.17** לכל מונה  $\kappa$  קיים מונה גדול ממנו, למשל  $H(\kappa)$ .

היות ומחלקת הסודרים סדורה היטב, נוכל כעת להגדיר:

**הגדרה 7.18** לכל מונה  $\kappa$ , נסמן ב- $\kappa^+$  את המונה הראשון הגדול מ- $\kappa$ .

**טענה 7.19** לכל מונה  $\kappa$ , מתקיים  $\kappa^+ = H(\kappa)$ .

**הוכחה:** אחרת, מתקיים  $\kappa < \kappa^+ < H(\kappa)$ , ואז מהגדרת  $H(\kappa)$ , קיימת העתקה חח"ע  $f: \kappa^+ \rightarrow \kappa$ .

סה"כ  $\kappa^+ < \kappa^+ = |\kappa^+| \leq |\kappa| = \kappa < \kappa^+$ . זוהי סתירה.

**טענה 7.20** כל מספר טבעי הוא מונה.

**הוכחה:** באינדוקציה על כל  $n$  טבעי.

בסיס האינדוקציה: מייד,  $\emptyset$  הוא מונה.

צעד האינדוקציה: נניח  $n$  טבעי והוא מונה, נראה כי  $n+1$  מונה.

בהנתן  $k > n+1$  ופונקציית שקילות  $f: k \leftrightarrow n+1$ , נוכל להשרות פונקציית שקילות  $f': k-1 \leftrightarrow n$ .

מהנחת האינדוקציה,  $n$  מונה. לכן  $k-1 = n$ , ומכאן כי  $k = n+1$ .

**טענה 7.21**  $\omega$  מונה.

**הוכחה:** כזכור, אם  $(A, W)$  סדורה היטב, אז  $|A| \leq \text{otp}(A, W)$ , לכן  $|\omega| \leq \omega$ .

אם  $|\omega| \neq \omega$ , אז קיים  $\omega > \omega$ , וקיימת פונקציית שקילות  $g: n \leftrightarrow \omega$ . לכן:

$$\begin{aligned} n+1 &= |n+1| \\ &= |n \uplus \{n\}| \\ &= |n \uplus \{\omega\}| \\ &= |\omega \uplus \{\omega\}| \\ &= |\omega+1| = |\omega| = n. \end{aligned}$$

זוהי סתירה.

## חשבון מונים

**הגדרה 7.22** סכום מונים הוא העוצמה של סכום כסודרים:

$$\kappa \oplus \lambda := |\kappa + \lambda| = |(\kappa \times \{0\}) \uplus (\lambda \times \{1\})|$$

קל לראות כי  $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$ .

**הערה 7.23** בסודרים  $1 + \omega \neq \omega + 1$ , במונים  $1 \oplus \omega = \omega = \omega \oplus 1$ .

**הגדרה 7.24** כפל המונים  $\kappa, \lambda$  הוא עוצמת הכפל כסודרים:

$$\kappa \odot \lambda := |\kappa \cdot \lambda| = |\kappa \times \lambda|$$

קל לראות כי  $\lambda \odot \kappa = \kappa \odot \lambda$ .

**סימון 7.25** לקבוצות  $A, B$ , מסמנים:  ${}^A B := \{f \mid f: A \rightarrow B\}$

**הגדרה 7.26** למונים  $\kappa, \lambda$  נגדיר:

$$\kappa^\lambda := |\lambda \kappa|$$

**טענה 7.27** לכל  $n, m$  טבעיים, חשבון מונים מתלכד עם חשבון של מספרים טבעיים:

$$.1 \quad n + m = n \oplus m$$

$$.2 \quad n \cdot m = n \odot m$$

$$.3 \quad n^m = n^m$$

**הוכחה:** (1) ראינו בהרצאה 3 כי בחשבון סודרים  $\alpha + 1$  שווה לעוקב של  $\alpha$ , ובאינדוקציה נובע כי  $\alpha + m$  שווה לעוקב ה- $m$  של  $\alpha$ . כמו כן, כל מספר טבעי  $k$  הוא מונה, ולכן  $k = |k|$  סה"כ:

$$\underbrace{n + m}_{\text{טבעיים}} = \underbrace{n + m}_{\text{סודרים}} = |n + m| = \underbrace{n \oplus m}_{\text{מונים}}$$

(2) קל להראות באינדוקציה כי חשבון סודרים  $n \cdot m$  שווה למספר הטבעי  $n \cdot m$  סה"כ:

$$\underbrace{n \cdot m}_{\text{טבעיים}} = \underbrace{n \cdot m}_{\text{סודרים}} = |n \cdot m| = \underbrace{n \odot m}_{\text{מונים}}$$

(3) קל להראות באינדוקציה כי חשבון סודרים  $n^m$  שווה למספר הטבעי  $n^m$  סה"כ:

$$\underbrace{n^m}_{\text{טבעיים}} = \underbrace{n^m}_{\text{סודרים}} = \text{otp}(E(m, n), <_E) = |E(m, n)| = |{}^m n| = \underbrace{n^m}_{\text{מונים}}$$

■

**טענה 7.28** לכל קבוצה  $A$ , מתקיים  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

**הוכחה:** תהי  $g_A : |A| \leftrightarrow A$  פונקציית שקילות כלשהי.

נגדיר  $f : \mathcal{P}(A) \leftrightarrow 2^{|A|}$  באופן הבא. לכל  $X \subseteq \mathcal{P}(A)$  ו- $\alpha \in |A|$ :

$$.f(X)(\alpha) := \begin{cases} 0, & g_A(\alpha) \notin X \\ 1, & g_A(\alpha) \in X \end{cases}$$

$f$  חח"ע כי אם  $X \neq Y$  שייכים ל- $\mathcal{P}(A)$ , נוכל לקחת  $a \in X \Delta Y$ , ואז עבור  $\alpha := g_A^{-1}(a)$  מתקיים

$$.f(X)(\alpha) \neq f(Y)(\alpha)$$

נראה כי  $f$  על:

בהנתן פונקציה  $\chi : |A| \rightarrow 2$ , נגדיר

$$.X := \{a \in A \mid \chi(g_A^{-1}(a)) = 1\}$$

מתקיים  $f(X) = \chi$  כי לכל  $\alpha \in |A|$ :

$$.f(X)(\alpha) = 1 \iff g_A(\alpha) \in X \iff \chi(g_A^{-1}(g_A(\alpha))) = 1 \iff \chi(\alpha) = 1$$

■

**משפט 7.29** (קנטור, 1892) לכל מונה  $\kappa$ , מתקיים  $2^\kappa > \kappa$ .

**הוכחה:** קל לבנות פונקציה חח"ע מ- $\kappa$  ל- $2^\kappa$  (כל סודר יישלח לפונקציית אינדיקטור<sup>4</sup>), ומכאן כי  $2^\kappa \geq \kappa$ . לכן, אם לא מתקיים ש- $2^\kappa > \kappa$ , הרי ש- $2^\kappa = \kappa$ .

מהטענה הקודמת,  $|\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$ , לכן, סה"כ נניח בשלילה  $g : \kappa \leftrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$  פונקציית שקילות.

נגדיר  $A := \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \notin g(\alpha)\}$ .

כיוון ש- $\kappa$  ו- $g$  קבוצות, נובע מאקסיומת ההפרדה כי  $A \in \mathcal{P}(\kappa)$  וכמובן  $A \ni \alpha$ .

מההנחה כי  $g$  על, נוכל למצוא  $\alpha \in \kappa$  כך ש- $g(\alpha) = A$ . ישנן שתי אפשרויות:

- אם  $\alpha \in A$ , אז מהגדרת  $A$  נקבל  $\alpha \notin g(\alpha)$ , בסתירה לכך ש- $\alpha \in g(\alpha) = A$ .
- אם  $\alpha \notin A$ , אז כיוון ש- $A = g(\alpha)$ ,  $\alpha \notin g(\alpha)$ , ואז  $\alpha \in A$ . סתירה.

מכאן אין  $g$  כנ"ל. ■

**מסקנה 7.30** לכל מונה  $\kappa$  מתקיים  $2^\kappa \geq \kappa^+$ .

עקרון השערת הרצף המוכללת (GCH)

לכל מונה אינסופי  $\kappa$ , מתקיים  $2^\kappa = \kappa^+$ .

**הערה 7.31** קורט גדל הוכיח במאמר משנת 1940 כי מערכת האקסיומות של ZFC מתיישבת עם GCH.

פול כהן הוכיח במאמר משנת 1963 כי מערכת האקסיומות של ZFC מתיישבת עם השלילה של GCH.

**הערה 7.32** שרפינסקי הוכיח במאמר מ-1947, כי GCH גורר את אקסיומת הבחירה.

**תרגיל 7.33** אם  $\kappa, \lambda, \mu$  מונים, אזי

$$1. (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \odot \mu}$$

$$2. \kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \odot \kappa^\mu$$

$$3. (\kappa \odot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \odot \lambda^\mu$$

$$4. \text{אם } \lambda < \mu, \text{ אז } \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu.$$

רמז: למשל, בסעיף הראשון, צריך למצוא פונקציית שקילות מאוסף הפונקציות  ${}^\mu(\lambda^\kappa)$  לאוסף הפונקציות  ${}^{\lambda \times \mu} \kappa$ .

<sup>4</sup>האינדיקטור של  $\alpha$  היא הפונקציה  $f_\alpha : \kappa \rightarrow 2$  המקיימת  $f_\alpha(\beta) = 1$  אם  $\beta = \alpha$ .