כזכור מהרצאה 5, לקבוצה A מגדירים:

$$.H(A) := \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists f : \alpha \xrightarrow{1-1} A\}$$

נראה היום כי אם A, קבוצה אז גם $H(A)$ קבוצה.

טענה 7.1 לקבוצה A, נסמן:

- $A' := \{(B, W) \mid B \text{ subset of } A,\ W \text{ well-ordering of } B\}$
- $A'' := \{\mathrm{otp}\,(B, W) \mid (B, W) \in A'\}$

אז $.A'' = H(A)$

הוכחה: נניח $\alpha \in H(A)$. תהי לכן $f : \alpha \to A$ פונקציה חח"ע. נגדיר

$$\begin{aligned} B &:= \mathrm{Im}\,(f) \\ W &:= \left\{(x, y) \in B \times B \mid f^{-1}(x) \in f^{-1}(y)\right\} \end{aligned}$$

אז B תת־קבוצה של A, W סידור טוב של B, ו־$\alpha = \mathrm{otp}(B, W)$ כי $(B, W) \cong (\alpha, \in)$. לכן $\alpha \in A''$.

בכיוון ההפוך:

נניח $\alpha \in A''$. ניקח B תת־קבוצה של A ו־ W סידור טוב שלה, כך ש־$\alpha := \mathrm{otp}(B, W)$.

אז קיימת $f : \alpha \leftrightarrow B$ חח"ע ועל שומרת סדר מ־ $(\alpha, \in)$ ל־ (B, W).

בפרט, f פונקציה חח"ע מ־α ל־A, ו־$\alpha \in H(A)$. ∎

טענה 7.2 קיימת נוסחא $\varphi_0(v_0)$ כך ש־$\varphi_0(x)$ מתקיים אמ"מ $x = \emptyset$.

הוכחה: $\forall y\,((y \in v_0) \to \neg\,(y = y))$. ∎

טענה 7.3 קיימת נוסחא $\varphi_1(v_0, v_1)$ כך ש־$\varphi_1(B, A)$ מתקיים אמ"מ $B \subseteq A$.

הוכחה: $\forall y (y \in v_0 \to y \in v_1)$. ∎

תרגיל 7.4 קיימת נוסחא $\varphi_2(v_0, v_1, v_2)$ כך ש־$\varphi_2(x_0, x_1, x_2)$ מתקיים אמ"מ $x_2 = (x_0, x_1)$.[1]

טענה 7.5 קיימת נוסחא $\varphi_3(v_0, v_1)$ כך ש־$\varphi_3(x, y)$ מתקיים אמ"מ x סידור טוב של y.

הוכחה: יש להביע כי v_0 יחס בינארי על v_1 שהוא אנטי־רפלקסיבי, טרנזיטיבי, כך שלכל תת־קבוצה לא ריקה של v_1 יש איבר ראשון לפי v_0. נעשה זאת כדלקמן:

$$\begin{aligned} &\forall p((p \in v_0) \to \exists a \exists b(a \in v_1 \wedge b \in v_1 \wedge \varphi_2(a, b, p))\wedge \\ &\forall a \forall p\,((a \in v_1 \wedge \varphi_2\,(a, a, p)) \to \neg\,(p \in v_0))\wedge \\ &\forall a \forall b \forall c \forall x \forall y \forall z\,((a \in v_1 \wedge b \in v_1 \wedge c \in v_1 \wedge \varphi_2\,(a, b, x) \wedge \varphi_2\,(b, c, y) \wedge \varphi_2\,(a, c, z) \wedge x \in v_0 \wedge y \in v_0) \to (z \in v_0))\wedge \\ &\forall a\,(\varphi_0(a) \vee \neg\varphi_1(a, v_1) \vee \exists c\,(c \in a \wedge \forall d\,((d \in a \wedge \neg\,(d = c)) \to \exists p\,(\varphi_2\,(c, d, p) \wedge p \in v_0)))) \end{aligned}$$

∎

טענה 7.6 קיימת נוסחא $\varphi_4(v_0)$ כך ש־$\varphi_4(x)$ מתקיים אמ"מ x סודר.

[1] כזכור, הזוג הסדור (x_0, x_1) מוגשם כ־$\{\{x_0\}, \{x_0, x_1\}\}$.

הוכחה: יש להביע כי v_0 טרנזיטיבית וסדורה היטב ע"י יחס השייכות. נעשה זאת כדלקמן:

$$\forall a \forall b((a \in v_0 \wedge b \in a) \to (b \in v_0)) \wedge$$
$$\exists w(\forall p((p \in w) \leftrightarrow \exists x \exists y(y \in v_0 \wedge x \in y \wedge \varphi_2(x,y,p))) \wedge \varphi_3(w,v_0))$$

■

תרגיל 7.7 קיימת נוסחא $\varphi_5(v_0,v_1)$ כך ש־$\varphi_5(x,y)$ מתקיים אמ"מ $x=(B,W)$, y סודר, וקיימת פונקציה חח"ע ועל מ־B ל־y המהווה איזומורפיזם סדר מ־(B,W) ל־$(y,\in)$.

משפט 7.8 אם A קבוצה, אז גם $H(A)$ קבוצה.

הוכחה: נניח A קבוצה. אז

$$.A' = \left\{ p \in \underbrace{\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(A)\right)\right) \cup \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(A)\right) \cup \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(A \times A)\right)\right)} \mid \exists B \exists W \varphi_1(B,A) \wedge \varphi_3(W,B) \wedge \varphi_2(B,W,p) \right\}$$

מאקסיומת ההפרדה עבור הקבוצה $\underbrace{}$, נסיק כי A' קבוצה.

לבסוף, מאקסיומת ההחלפה, נקבל כי $\{\alpha \mid \exists x \in A' \, \varphi_5(x,\alpha)\}$ קבוצה. אבל האחרונה היא A'', כלומר, $H(A)$, כמבוקש. ■

מונים (Cardinals)

הערה: אנו מפתחים את המושגים בתוך המערכת ZFC.[2]

הגדרה 7.9 מונה הוא סודר α כך שלכל סודר $\beta < \alpha$, כל פונקציה $f:\beta \to \alpha$ איננה חח"ע ועל.

למשל, $\omega+1$ איננו מונה כי ניתן להגדיר פונקציית שקילות $f:\omega \leftrightarrow \omega+1$ על־ידי:

$$f(n) := \begin{cases} \omega, & n=0 \\ n-1, & n>0 \end{cases}$$

מונים נהוג לסמן באותיות יווניות: $\kappa, \lambda, \theta, \mu$.

הגדרה 7.10 לכל קבוצה A, נגדיר

$$.\,|A| := \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists g : \alpha \leftrightarrow A\}$$

טענה 7.11 לכל קבוצה A, $|A|$ מוגדר היטב, וזהו מונה.

הוכחה: מעקרון הסדר הטוב, הקבוצה:

$$\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists g : \alpha \leftrightarrow A\}$$

איננה ריקה. כיוון שמחלקת הסודרים סדורה היטב, יש לה איבר ראשון.

נראה כי $|A|$ מונה.

אכן, אם קיים $\beta < |A|$ ופונקציית שקילות $f:\beta \leftrightarrow |A|$, נוכל לקחת פונקציית שקילות $g_A : |A| \leftrightarrow A$, ונקבל פונקציית שקילות $(g_A)^{-1} \circ f : \beta \to A$ בסתירה למינימליות של $|A|$. ■

תרגיל 7.12 1. אם $(A,<)$ סדורה היטב, אז $|A| \le \mathrm{otp}\,(A,<)$.

[2] בהרצאה 6 נגענו קצת בפיתוח הכללי יותר במערכת ZF.

2. קבוצה A היא מונה אמ"מ $A=|A|$.
3. לכל שתי קבוצות A,B: $|A|=|B|$ אמ"מ קיימת פונקציה שקילות $g:A\leftrightarrow B$.

טענה 7.13 לכל שתי קבוצות A,B: $|A|\le|B|$ אמ"מ קיימת $f:A\to B$ חח"ע.

הוכחה: $(\Leftarrow)$: תהי $g_A:|A|\leftrightarrow A$ פונקציית שקילות. תהי $g_B:|B|\leftrightarrow B$ פונקציית שקילות.

נניח $|A|\le|B|$, ונגדיר $f:=g_B\circ(g_A)^{-1}$.

אז f חח"ע מ־A ל־B, ומוגדרת היטב כי $\mathrm{dom}(g_B)\supseteq\mathrm{dom}(g_A)=\mathrm{Im}(g_A^{-1})$.

$(\Rightarrow)$: נניח $f:A\to B$ חח"ע. תהי $g_B:|B|\leftrightarrow B$ שקילות.

אז $(g_B)^{-1}\circ f$ פונקציה חח"ע מ־ A ל־ $|B|$, ולכן

$$|A|=\left|\mathrm{Im}\left(g_B^{-1}\circ f\right)\right|.$$

סה"כ:

$$|A|\le\mathrm{otp}\left(\mathrm{Im}\left(g_B^{-1}\circ f\right),\in\right)\underset{\substack{\downarrow\\ \text{הרצאה 4}}}{\le}\mathrm{otp}\left(|B|,\in\right)=|B|$$

■

מסקנה 7.14 (קנטור־ברנשטיין־דדקינד)

אם A,B קבוצות וקיימות $\begin{matrix}f_1:A\to B\\ f_2:B\to A\end{matrix}$ חד־חד־ערכיות, אז קיימת $g:A\leftrightarrow B$ שקילות.

הוכחה: מהפונקציה f_1 מקבלים $|A|\le|B|$. מהפונקציה f_2 מקבלים $|B|\le|A|$.

כיוון ש־ $|A|$, $|B|$ סודרים, הרי ש־ $|A|=|B|$.

אז מהתרגיל נובע כי קיימת $g:A\leftrightarrow B$ שקילות. ■

מסקנה 7.15 הבאים שקולים לכל שתי קבוצות A,B:

1. $|A|<|B|$.
2. קיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע, אך לא קיימת פונקציה $g:B\to A$ חח"ע.
3. לא קיימת פונקציה $g:B\to A$ חח"ע.

הוכחה: $(1\Leftarrow 2)$: מ־$|A|<|B|$, נקבל $|A|\le|B|$ ואז מטענה קודמת, קיימת $f:A\to B$ חח"ע.

מאידך, אם הייתה קיימת $g:A\to B$ חח"ע, אז $|A|=|B|$ בסתירה להנחה.

$(2\Leftarrow 3)$: טריוויאלי.

$(3\Leftarrow 1)$: היות ו־$|A|,|B|$ סודרים, אז מכך שלא מתקיים $|A|<|B|$, נובע כי $|B|\le|A|$. אבל אז, מטענה קודמת, קיימת $g:B\to A$ חח"ע בסתירה להנחה. ■

טענה 7.16 לכל קבוצה A, $H(A)$ מונה.

הוכחה: נניח בשלילה כי $H(A)$ לא מונה, ונקבע $\alpha<H(A)$ ביחד עם פונקציית שקילות $g:\alpha\leftrightarrow H(A)$.

כיוון ש־ $\alpha<H(A)$, קיימת $f:\alpha\to A$ חח"ע, ומכאן כי $f\circ g^{-1}$ פונקציה חח"ע מ־$H(A)$ ל־A בסתירה להגדרת $H(A)$. ■

מסקנה 7.17 לכל מונה κ קיים מונה גדול ממנו, למשל $H(\kappa)$.

היות ומחלקת הסודרים סדורה היטב, נוכל כעת להגדיר:

הגדרה 7.18 לכל מונה κ, נסמן ב-κ^+ את המונה הראשון הגדול מ-κ.

טענה 7.19 לכל מונה κ, מתקיים $\kappa^+ = H(\kappa)$.

הוכחה: אחרת, מתקיים $\kappa < \kappa^+ < H(\kappa)$, ואז מהגדרת $H(\kappa)$, קיימת העתקה חח"ע $f : \kappa^+ \to \kappa$.
סה"כ $\kappa^+ = |\kappa^+| \leq |\kappa| = \kappa < \kappa^+$. סתירה. ■

טענה 7.20 כל מספר טבעי הוא מונה.

הוכחה: באינדוקציה על כל n טבעי.
<u>בסיס האינדוקציה:</u> מיידי, $\emptyset$ הוא מונה.
<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח n טבעי והוא מונה, נראה כי $n+1$ מונה.
בהנתן $k < n+1$ ופונקציית שקילות $f : k \leftrightarrow n+1$, נוכל להשרות פונקציית שקילות $f' : k-1 \leftrightarrow n$.
מהנחת האינדוקציה, n מונה. לכן $n = k-1$, ומכאן כי $k = n+1$. ■

טענה 7.21 ω מונה.

הוכחה: כזכור, אם $(A,<)$ סדורה היטב, אז $|A| \leq \operatorname{otp}(A,<)$, לכן $|\omega| \leq \omega$.
אם $|\omega| \neq \omega$, אז קיים $n < \omega$, וקיימת פונקציית שקילות $g : n \leftrightarrow \omega$:

$$\begin{aligned} n+1 &= |n+1| \\ &= |n \uplus \{n\}| \\ &= |n \uplus \{\omega\}| \\ &= |\omega \uplus \{\omega\}| \\ &= |\omega+1| = |\omega| = n. \end{aligned}$$

סתירה. ■

חשבון מונים

הגדרה 7.22 סכום מונים הוא העוצמה של סכום כסודרים:

$$\kappa \oplus \lambda := |\kappa + \lambda| = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|.$$

קל לראות כי $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$.

הערה 7.23 בסודרים $1+\omega \neq \omega+1$, במונים $1 \oplus \omega = \omega = \omega \oplus 1$.

הגדרה 7.24 כפל המונים κ, λ הוא עוצמת הכפל כסודרים:

$$\kappa \odot \lambda := |\kappa \cdot \lambda| = |\kappa \times \lambda|.$$

קל לראות כי $\kappa \odot \lambda = \lambda \odot \kappa$.

הגדרה 7.25 למונים κ, λ נגדיר:
$$\kappa^\lambda := |{}^\lambda\kappa|,$$
כאשר
$${}^AB := \{f \mid f : A \to B\}.$$

טענה 7.26 לכל n, m טבעיים, חשבון מונים מתלכד עם חשבון של מספרים טבעיים:

1. $n + m = n + m$.
2. $n \cdot m = n \cdot m$.
3. $n^m = n^m$.

הוכחה: (1) ראינו בהרצאה 3 כי בחשבון סודרים $\alpha + 1$ שווה לעוקב של α, ובאינדוקציה נובע כי $\alpha + m$ שווה לעוקב ה-m-י של α. כמו כן, כל מספר טבעי k הוא מונה, ולכן $|k| = k$. סה"כ:

$$\underbrace{n + m}_{\text{טבעיים}} = \underbrace{n + m}_{\text{סודרים}} = |n + m| = \underbrace{n \oplus m}_{\text{מונים}}$$

(2) קל להראות באינדוקציה כי חשבון סודרים $n \cdot m$ שווה למספר הטבעי $n \cdot m$. סה"כ:

$$\underbrace{n \cdot m}_{\text{טבעיים}} = \underbrace{n \cdot m}_{\text{סודרים}} = |n \cdot m| = \underbrace{n \odot m}_{\text{מונים}}$$

(3) קל להראות באינדוקציה כי חשבון סודרים n^m שווה למספר הטבעי n^m. סה"כ:

$$\underbrace{n^m}_{\text{טבעיים}} = \underbrace{n^m}_{\text{סודרים}} = \operatorname{otp}(E(m,n), <_E) = |E\,(m,n)| = |{}^mn| = \underbrace{n^m}_{\text{מונים}}$$

■

טענה 7.27 לכל קבוצה A, מתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

הוכחה: תהי $g_A : |A| \leftrightarrow A$ פונקציית שקילות כלשהי.

נגדיר $f : \mathcal{P}(A) \leftrightarrow {}^{|A|}2$ באופן הבא. לכל $X \in \mathcal{P}(A)$ ו-$\alpha \in |A|$:

$$f(X)(\alpha) := \begin{cases} 0, & g_A(\alpha) \notin X \\ 1, & g_A(\alpha) \in X \end{cases}$$

f חח"ע כי אם $X \neq Y$ שייכים ל-$\mathcal{P}(A)$, נוכל לקחת $a \in X \triangle Y$, ואז עבור $\alpha := g_A^{-1}(A)$ מתקיים
$$f(X)(\alpha) \neq f(Y)(\alpha).$$

נראה כי f על:

בהנתן פונקציה $\chi : |A| \to 2$, נגדיר
$$X := \left\{a \in A \mid \chi\left(g_A^{-1}(a)\right) = 1\right\}.$$

מתקיים $f(x) = \chi$, כי לכל $\alpha \in |A|$:

$$f(X)(\alpha) = 1 \iff g_A(\alpha) \in X \iff \chi\left(g_A^{-1}\left(g_A(\alpha)\right)\right) = 1 \iff \chi(\alpha) = 1.$$

■

משפט 7.28 (קנטור, 1892) לכל מונה κ, מתקיים $\kappa < 2^\kappa$.

הוכחה: קל לבנות פונקציה חח"ע מ-κ ל-${}^\kappa 2$ (כל סודר יישלח לפונקציית אינדיקטור[3]). לכן, אם לא מתקיים ש-$\kappa < 2^\kappa$, הרי ש-$\kappa = 2^\kappa$.

מהטענה הקודמת, $|\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$, לכן, סה"כ נניח בשלילה $g : \kappa \leftrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ פונקציית שקילות.

נגדיר $A := \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \notin g(\alpha)\}$.

כיוון ש-κ ו-g קבוצות, נובע מאקסיומת ההפרדה כי A קבוצה, וכמובן $A \in \mathcal{P}(\kappa)$.

מההנחה כי g על, נוכל למצוא $\alpha \in \kappa$ כך ש- $g(\alpha) = A$. ישנן שתי אפשרויות:

- אם $\alpha \in A$, אז מהגדרת A נקבל $\alpha \notin g(\alpha)$, בסתירה לכך ש-$\alpha \in A = g(\alpha)$.
- אם $\alpha \notin A$, אז כיוון ש- $g(\alpha) = A$, $\alpha \notin g(\alpha)$, ואז $\alpha \in A$. סתירה.

מכאן אין g כנ"ל. ■

מסקנה 7.29 לכל מונה κ מתקיים $\kappa^+ \leq 2^\kappa$.

עקרון השערת הרצף המוכללת (GCH)

לכל מונה אינסופי κ, מתקיים $2^\kappa = \kappa^+$.

הערה 7.30 קורט גדל הוכיח במאמר משנת 1940 כי מערכת האקסיומות של ZFC מתיישבת עם GCH.

פול כהן הוכיח במאמר משנת 1963 כי מערכת האקסיומות של ZFC מתיישבת עם השלילה של GCH.

הערה 7.31 שרפינסקי הוכיח במאמר מ-1947, כי GCH גורר את אקסיומת הבחירה.

תרגיל 7.32 אם κ, λ, μ מונים, אזי

1. $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
2. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
3. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$
4. אם $\lambda < \mu$, אז $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.

רמז: למשל, בסעיף הראשון, צריך למצוא פונקציית שקילות מאוסף הפונקציות ${}^\mu\left({}^\lambda\kappa\right)$ לאוסף הפונקציות ${}^{\lambda\times\mu}\kappa$.

[3] האינדיקטור של α היא הפונקציה $f_\alpha : \kappa \to 2$ המקיימת $f_\alpha(\beta) = 1$ אמ"מ $\alpha = \beta$.