תזכורת מהשיעור שעבר: אם $(A,\lhd)$ סדורה היטב, אז $|A|\leq \mathrm{otp}(A,\lhd)$.

טענה 8.1 נניח α סודר ו־κ,λ מונים.
אם $\kappa\leq\alpha\leq\lambda$, אז $\kappa\leq|\alpha|\leq\lambda$.

הוכחה: ברור כי $|\alpha|\leq\alpha\leq\lambda$.

כעת, נניח בשלילה כי לא מתקיים $\kappa\leq|\alpha|$. אז $|\alpha|<\kappa$, וסה"כ $|\alpha|<\kappa\leq\alpha$.

העתקת הזהות $f:\kappa\to\alpha$ היא חח"ע ולכן $|\kappa|\leq|\alpha|$. סה"כ $|\alpha|<\kappa=|\kappa|\leq|\alpha|$. זוהי סתירה. ■

תרגיל 8.2 הראו כי כל מונה אינסופי הוא סודר גבולי.

טענה 8.3 נניח γ סודר, ו־$(A,\lhd)$ קבוצה סדורה היטב כך שלכל $a\in A$, מתקיים $\mathrm{otp}(a_\downarrow,\lhd)<\gamma$.
אז $\mathrm{otp}(A,\lhd)\leq\gamma$. בפרט $|A|\leq|\gamma|$.

הוכחה: יהי $\delta:=\mathrm{otp}(A,\lhd)$, ונקבע $f:\delta\leftrightarrow A$ שומרת סדר מ־$(\delta,\in)$ ל־$(A,\lhd)$.

אם בשלילה, $\gamma<\delta$, אז $\gamma\in\mathrm{dom}(f)$ ועבור $a:=f(\gamma)$ נקבל כי $\mathrm{otp}(a_\downarrow,\lhd)=\mathrm{otp}(\gamma_\downarrow,\in)=\gamma$ בסתירה להנחה. ■

תרגיל 8.4 הראו כי $\pi:\omega\times\omega\to\omega$ המוגדרת על־ידי הכלל

$$\pi(a,b):=2^a(2b+1)-1$$

היא חד־חד־ערכית ועל.[1]

בפרט, $\omega\odot\omega=\omega$. כעת נכליל זאת לכל מונה אינסופי κ.

משפט 8.5 (Jourdain, 1908) נניח κ מונה אינסופי. אז $\kappa\odot\kappa=\kappa$.[2]

הוכחה: צריך להראות כי לכל מונה אינסופי κ, מתקיים $|\kappa\times\kappa|=\kappa$, כלומר, כי קיים סידור טוב של $\kappa\times\kappa$ מטיפוס סדר κ.

אנו נראה כי, יתר על כן, קיים סידור טוב $\lhd$ של כל $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ כך ש־$\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,\lhd)=\kappa$ לכל מונה אינסופי κ.

בשלב ראשון, יהי $<_1$ סידור מילוני עברי של $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$. כלומר, לכל שני זוגות סודרים (α,β) ו־(α',β'):

$$(\alpha,\beta)<_1(\alpha',\beta') \iff \begin{array}{c}(\beta\in\beta')\vee\\ (\beta=\beta'\ \wedge\ \alpha\in\alpha')\end{array}.$$

כזכור מהרצאה 3, $<_1$ מהווה סידור טוב, ולכל סודר κ מתקיים $\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_1)=\kappa^2$.

בשלב שני, נגדיר יחס סדר $<_2$ על $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$, כדלקמן. $(\alpha,\beta)<_2(\alpha',\beta')$ אמ"מ אחד מהבאים מתקיים:

- $\max(\{\alpha,\beta\},\in)<\max(\{\alpha',\beta'\},\in)$, או
- $\max(\{\alpha,\beta\},\in)=\max(\{\alpha',\beta'\},\in)$ וגם $(\alpha,\beta)<_1(\alpha',\beta')$.

תת־טענה: $<_2$ סידור טוב של $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$.

[1] רמז: לכל מספר טבעי חיובי n, התבוננו בפיתוח הבינארי שלו.
[2] פעולת הכפל היא חשבון מונים.

הוכחה: קל לראות כי $<_2$ הוא אנטי־רפלקסיבי.

כדי להראות כי $<_2$ טרנזיטיבי, נניח $(\alpha,\beta) <_2 (\alpha',\beta')$ ו־$(\alpha',\beta') <_2 (\alpha'',\beta'')$, עבור שלוש זוגות כלשהן, ונראה $(\alpha,\beta) <_2 (\alpha'',\beta'')$.

- אם $\max_\in\{\alpha,\beta\} < \max_\in\{\alpha'',\beta''\}$, הרי שסיימנו.
- אחרת, נובע מההנחה כי $\max_\in\{\alpha,\beta\} = \max_\in\{\alpha',\beta'\} = \max_\in\{\alpha'',\beta''\}$, ולכן

$$(\alpha,\beta) <_1 (\alpha',\beta') <_1 (\alpha'',\beta'').$$

היות ו־$<_1$ יחס טרנזיטיבי. הרי ש־$(\alpha,\beta) <_1 (\alpha'',\beta'')$. סה"כ: $(\alpha,\beta) <_2 (\alpha'',\beta'')$.

הלאה. נניח כי $X \subseteq \mathrm{On}\times\mathrm{On}$ קבוצה לא ריקה. נגדיר

$$\begin{aligned}\delta &:= \min_\in\left\{\max_\in\{\alpha,\beta\} \mid (\alpha,\beta)\in X\right\}\\ (\alpha^*,\beta^*) &:= \min_{<_1}\left\{(\alpha,\beta)\in X \mid \max_\in\{\alpha,\beta\}=\delta\right\}\end{aligned}$$

אז לכל $(\alpha,\beta)\in X$ מתקיים $\delta < \max_\in\{\alpha,\beta\}$ או $\delta = \max_\in\{\alpha,\beta\} \ \wedge\ (\alpha^*,\beta^*) \le_1 (\alpha,\beta)$.

ולכן (α^*,β^*) הוא האיבר הראשון ב־X.

מש"ל תת־טענה☒

כעת ניגש להוכחת המשפט. נניח בשלילה כי קיים מונה אינסופי κ כך ש־$\kappa \neq \mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_2)$.

כיוון ש־κ מונה וקיימת פונקציה חח"ע מ־κ ל־$\kappa\times\kappa$, נקבל $\kappa = |\kappa| \le |\kappa\times\kappa| \le \mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_2)$.

לכן $\kappa < \mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_2)$. בפרט, נובע מטענה 8.3 כי קיים $(\alpha,\beta)\in\kappa\times\kappa$ כך ש־$\kappa \le \mathrm{otp}((\alpha,\beta)_\downarrow,<_2)$.

נסמן $\delta := \max\{\alpha,\beta\}$. שימו לב כי מהגדרת $<_2$ נובע כי

$$(\alpha,\beta)_\downarrow = \{(\alpha',\beta')\in\mathrm{On}\times\mathrm{On} \mid (\alpha',\beta') <_2 (\alpha,\beta)\} \subseteq (\delta+1)\times(\delta+1).$$

נסמן $\gamma := \mathrm{otp}((\delta+1)\times(\delta+1),<_2)$. אז

$$\kappa \le \mathrm{otp}((\alpha,\beta)_\downarrow,<_2) \le \mathrm{otp}((\delta+1)\times(\delta+1),<_2) = \gamma.$$

כיוון ש־$\kappa \le \gamma$ ו־κ מונה, נקבל כי $\kappa \le |\gamma|$. אז, מהגדרת γ נובע:

$$\kappa \le |\gamma| = |(\delta+1)\times(\delta+1)|.$$

אם $\delta\in\omega$, הרי ש־ $(\delta+1)\times(\delta+1)$ קבוצה סופית, ומקבלים סתירה.

לכן, $\omega \le \delta < \kappa$. היות ו־$\kappa$ הוא מונה אינסופי, הרי שהוא סודר גבולי, ולכן גם $\omega < \delta+1 < \kappa$.

נסמן $\mu := |\delta+1|$. אז μ מונה אינסופי קטן מ־κ, ולכן ממינימליות κ, מתקיים $\mu = \mathrm{otp}(\mu\times\mu,<_2)$. בפרט, $\mu\odot\mu = \mu$.

סה"כ:

$$\begin{aligned}\kappa &\le |(\delta+1)\times(\delta+1)|\\ &= |\delta+1|\odot|\delta+1|\\ &= \mu\odot\mu = \mu < \kappa\end{aligned}$$

וזוהי סתירה. ■

טענה 8.6 אם λ מונה אינסופי, ו־ κ מונה כלשהו המקיים $0 < \kappa \le \lambda$, אז

$$\kappa\oplus\lambda = \kappa\odot\lambda = \lambda.$$

הוכחה: המקרה $\kappa = 1$ טריוויאלי.

נניח $\kappa \geq 2$, אז:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \kappa \oplus \lambda \\ &\leq \lambda \oplus \lambda \\ &= 2 \odot \lambda \\ &\leq \kappa \odot \lambda \\ &\leq \lambda \odot \lambda = \lambda \end{aligned}$$

■

מסקנה 8.7 (Hessenberg, 1906) אם κ, λ מונים אינסופיים, אז $\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

טענה 8.8 נניח κ, λ, θ מונים ומתקיים $\kappa \leq \lambda$. אז $\kappa^\theta \leq \lambda^\theta$.

הוכחה: העתקת הזהות היא פונקציה חד-חד-ערכית מ- $^\theta\kappa$ ל- $^\theta\lambda$. ■

מסקנה 8.9 אם λ מונה אינסופי ו-κ מונה המקיים $1 < \kappa \leq \lambda$, אז $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.

בפרט, $2^\lambda = \lambda^\lambda$.

הוכחה: ראינו כבר כי $\kappa \leq \lambda$ גורר $\kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda$.

נתמקד כעת באי-השיוויון השני:

$$\lambda \underset{\text{קנטור}}{<} 2^\lambda \underset{2\leq\kappa}{\leq} \kappa^\lambda$$

ולכן

$$\lambda^\lambda \underset{\lambda<\kappa^\lambda}{\leq} \left(\kappa^\lambda\right)^\lambda \underset{\text{תרגיל מסוף הרצאה 7}}{=} \kappa^{\lambda\odot\lambda} \underset{\lambda\odot\lambda=\lambda}{=} \kappa^\lambda$$

סה"כ $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda$. ■

טענה 8.10 לכל סודר α, מתקיים: $|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+$.

בפרט, $H(\alpha) = |\alpha|^+$.

הוכחה: ברור כי $|\alpha| \leq \alpha$.

נניח בשלילה $\alpha \not< |\alpha|^+$. אז $|\alpha|^+ \leq \alpha$ וקיימת $f : |\alpha|^+ \to \alpha$ חח"ע.

תהי $g : \alpha \leftrightarrow |\alpha|$ פונקציית שקילות. אז $g \circ f$ היא פונקציה חח"ע מ-$|\alpha|^+$ ל-$|\alpha|$.

היות ו- $|\alpha|^+$ סודר גדול מ-$|\alpha|$, נקבל סה"כ ממשפט מקנטור-ברנשטיין פונקציית שקילות מ-$|\alpha|$ ל- $|\alpha|^+$,

בסתירה לכך ש- $|\alpha|^+$ מונה גדול מ- $|\alpha|$. ■

הגדרה 8.11 מונה κ נקרא עוקב אם קיים מונה λ כך ש- $\kappa = \lambda^+$.

הגדרה 8.12 מונה κ שאינו עוקב נקרא גבולי.

נסמן ב-$\mathrm{Card}(\kappa)$ את קבוצת כל המונים הקטנים מ-κ. כלומר, $\mathrm{Card}(\kappa) = \{\lambda \in \kappa \mid |\lambda| = \lambda\}$.

טענה 8.13 אם κ מונה גבולי, אז $\kappa = \sup(\mathrm{Card}(\kappa))$.

הוכחה: נסמן $\alpha := \sup(\mathrm{Card}(\kappa))$. נניח בשלילה $\alpha < \kappa$. מכאן כי

$$|\alpha| \le \alpha < |\alpha|^+ \le \kappa.$$

היות ו- κ אינו מונה עוקב, $\kappa \ne |\alpha|^+$. כלומר $|\alpha|^+ < \kappa$.
התקבל כי $|\alpha|^+ \in \mathrm{Card}(\kappa)$, בסתירה לכך ש- $\sup(\mathrm{Card}(\kappa)) = \alpha < |\alpha|^+$. ■

טענה 8.14 אם A קבוצה של מונים, אז $\bigcup A$ מונה.

הוכחה: נסמן $\alpha := \bigcup A$. בהרצאה 2 ראינו כי α סודר.
אם α איננו מונה, אז $|\alpha| < \alpha$, ומכיוון ש- $|\alpha| < \alpha = \sup(A)$, קיים $\lambda \in A$ כך ש- $|\alpha| < \lambda \le \alpha$.
כיוון ש- α אינו מונה, מתקיים $\lambda < \alpha$, ואז

$$|\alpha| < \lambda < \alpha < |\alpha|^+.$$

אך אז λ מונה הממוקם בין $|\alpha|$ לבין $|\alpha|^+$, בסתירה להגדרת $|\alpha|^+$. ■

הגדרה 8.15 מגדירים את האלפים ברקורסיה על הסודרים:

1. $\aleph_0 := \omega$
2. $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$
3. לכל α גבולי $0 <$:

$$\aleph_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta.$$

תרגיל 8.16 α גבולי $\iff$ $\aleph_\alpha$ גבולי. לכן, α עוקב $\iff$ $\aleph_\alpha$ עוקב.

הערה 8.17 ההעתקה $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ נקראת פונקציית האלף. ננתח אותה בהמשך.

תזכורת: קבוצה $D \subseteq A$ נקראת שולטת/קופינלית בקס"ח $(A, \lhd)$ אמ"מ לכל $a \in A$ קיים $d \in D$ כך ש-$a \unlhd d$ (כלומר: $a \lhd d$ או $a = d$).

הגדרה 8.18 $\mathrm{cf}(A, \lhd) := \min\{|D| \mid D \subseteq A \text{ שולטת ב-} (A,\lhd)\}$.

זהו תמיד מונה $\le |A|$.

טענה 8.19 לכל קס"ח $(A, \lhd)$, קיימת פונקציה $f : \mathrm{cf}(A, \lhd) \to A$ המקיימת:

1. f חד-חד-ערכית.
2. אם $f(\alpha) \lhd f(\beta)$, אז $\alpha \in \beta$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ קופינלית ב- $(A, \lhd)$.

הוכחה: נסמן $\kappa := \mathrm{cf}(A, \lhd)$, ותהי $D \subseteq A$ קופינליות מעוצמה κ.
תהי $g : \kappa \leftrightarrow D$ פונקציית שקילות כלשהי. נסמן

$$X := \{\alpha \in \kappa \mid \forall \beta < \alpha\ \neg(g(\alpha) \lhd g(\beta))\}.$$

אז $g[X]$ קופינלית ב-$(A, \lhd)$, ומכאן כי $|X| = \kappa$.[3]
תהי $\pi : X \to \kappa$ איזומורפיזם שומר סדר מ- $(X, \in)$ ל- $(\kappa, \in)$.
אז $f := g \circ \pi^{-1}$ פונקציה חח"ע, $\mathrm{Im}(f) = g[X]$ קופינלית, ותנאי 2 מתקיים מעצם הגדרת X. ■

[3] זכרו כי $\kappa = \mathrm{cf}(A, \lhd)$.

מסקנה 8.20 אם $(A, \lhd)$ סדורה קווית, אז $\mathrm{cf}(A,\lhd) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(A,\lhd), \in)$.

הוכחה: נסמן $\kappa := \mathrm{cf}(A,\lhd)$ ו-$\theta := \mathrm{cf}(\kappa, \in)$.

תהי $f : \kappa \to A$ פונקציה המובטחת ע"י טענה 8.19.

כיוון ש- $(A,\lhd)$ סדורה קווית, סעיף 2 בעצם אומר כי f שומרת סדר.

נניח בשלילה כי $\theta < \kappa$. אז מפניה נוספת לטענה 8.19, קיימת $g : \theta \to \kappa$ שתמונתה קופינלית ב- $(\kappa, \in)$.

נראה כעת כי $(f \circ g) : \theta \to A$ פונקציה שתמונתה קופינלית ב- $(A,\lhd)$, **בסתירה** לכך ש- $\theta < \mathrm{cf}(A,\lhd)$.

יהי $a \in A$ כלשהו. כיוון שתמונת f קופינלית, ניתן למצוא $\alpha \in \kappa$ כך ש-$a \unlhd f(\alpha)$.

כיוון שתמונת g קופינלית, יהי $\beta \in \theta$ כך ש-$\alpha \le g(\beta)$. אז

$$a \unlhd f(\alpha) \underset{\text{שומרת סדר}}{\underset{\downarrow}{\unlhd}} f\left(g(\beta)\right) = \left(f \circ g\right)(\beta)\ .$$

■

הגדרה 8.21 מונה κ נקרא סדיר (regular) אמ"מ $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa, \in)$.

הגדרה 8.22 מונה κ נקרא חריג (singular) אמ"מ $\kappa \neq \mathrm{cf}(\kappa, \in)$. כלומר, אמ"מ $\kappa < \mathrm{cf}(\kappa,\in)$.

ראינו: אם $(A,\lhd)$ סדר קווי, אז $\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה סדיר.

בפרט: לכל סודר α, $\mathrm{cf}(\alpha, \in)$ מונה סדיר.

הערה 8.23 אם α סודר, נהוג לכתוב $\mathrm{cf}(\alpha)$ במקום $\mathrm{cf}(\alpha, \in)$.

תרגיל 8.24 אם α סודר גבולי $0 <$, אז $\omega \le \mathrm{cf}(\alpha)$.

משפט 8.25 (האוסדורף, 1908) לכל מונה אינסופי κ, κ^+ הוא מונה סדיר.

הוכחה: נניח בשלילה כי κ^+ חריג.

מכאן, כי קיימת $D \subseteq \kappa^+$ קופינלית מעוצמה $\le \kappa$.

מהגדרת κ^+, לכל $\alpha < \kappa^+$ מתקיים $|\alpha| \le \kappa$, ולכן סה"כ:

1. $|D| \le \kappa$,
2. לכל $\alpha \in D$: $|\alpha_{\downarrow} \cup \{\alpha\}| = |\alpha + 1| \le \kappa$.

כיוון ש- D שולטת, לכל $\beta \in \kappa^+$ קיים $\alpha \in D$ כך ש- $\beta \in \alpha_{\downarrow} \cup \{\alpha\}$.

כלומר,

$$\kappa^+ = \bigcup \{\alpha_{\downarrow} \cup \{\alpha\} \mid \alpha \in D\}.$$

התקבל כי κ^+ הוא איחוד של $\le \kappa$ קבוצות, כל אחת מעוצמה $\le \kappa$.

הטענה הבאה, לכן, מובילה לסתירה. ■

טענה 8.26 נניח κ מונה אינסופי, $\{A_i \mid i \in I\}$ קבוצה של קבוצות, ומתקיים:

1. $|I| \le \kappa$,
2. $|A_i| \le \kappa$ לכל $i \in I$.

אז $|\bigcup_{i\in I} A_i| \le \kappa$.

הוכחה: ממשפט 8.5, מספיק להראות כי קיימת פונקציה חח"ע מ־$\bigcup_{i\in I} A_i$ ל־$\kappa\times\kappa$.

מהנתון 1 ומאקסיומת הבחירה, נוכל לקבוע פונקציה $g:\kappa\to I$ שהיא על.

לכל $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, נגדיר

$$\alpha_x := \min\{\alpha<\kappa \mid x\in A_{g(\alpha)}\}.$$

מהנתון 2, לכל $\alpha<\kappa$, הקבוצה הבאה איננה ריקה:

$$T_\alpha := \left\{\pi : A_{g(\alpha)} \to \kappa \mid \text{חח"ע } \pi\right\}.$$

מאקסיומת הבחירה, לכן, קיימת פונקציה $f:\kappa\to\bigcup_{\alpha<\kappa} T_\alpha$ כך ש־$f(\alpha)\in T_\alpha$ לכל $\alpha<\kappa$.

במילים פשוטות, לכל $\alpha<\kappa$, $f(\alpha)$ היא פונקציה חח"ע מ־ $A_{g(\alpha)}$ ל־ κ.

לבסוף, נגדיר פונקציה

$$h:\bigcup_{i\in I} A_i \to \kappa\times\kappa$$

על־ידי הכלל

$$h(x) := (\alpha_x, f(\alpha_x)(x)).$$

נראה כי h חח"ע. לשם כך, נניח x,y איברים שונים ב־ $\bigcup_{i\in I} A_i$.

- אם $\alpha_x\neq\alpha_y$, אז בוודאי $h(x)\neq h(y)$.
- אם $\alpha_x=\alpha_y$, אז כיוון ש־$f(\alpha_x)$ פונקציה חח"ע, נקבל

$$h(x)=(\alpha_x,f(\alpha_x)(x))\neq(\alpha_x,f(\alpha_x)(y))=(\alpha_y,f(\alpha_y)(y))=h(y).$$

■

מסקנה 8.27 $\aleph_{\alpha+1}$ מונה סדיר לכל סודר α.

תרגיל 8.28 נגדיר $(A,\lhd)$ קס"ח ומתקיים $1<\mathrm{cf}(A,\lhd)<\omega$.

הוכיחו כי $(A,\lhd)$ איננה סדורה קווית.

הבחנה 8.29 $\aleph_\omega$ מונה חריג.

הוכחה: הקבוצה $D:=\{\aleph_n \mid n<\omega\}$ קופינלית ב־ $(\aleph_\omega,\in)$. אך $|D|=\aleph_0<\aleph_\omega$. ■

דוגמא 8.30 יהי $A:=\bigcup_{n<\omega}(\{n\}\times\aleph_n)$. נתבונן בקס"ח $(A,\lhd)$ כאשר $(n,\alpha)\lhd(m,\beta)$ אמ"מ $\alpha\in\beta$ ו־$n=m$.
כלומר $(A,\lhd)$ הוא "סכום זר" של הקס"חים $\{(\aleph_n,\in) \mid n<\omega\}$.

ברור כי $\mathrm{cf}(A,\lhd)\le|A|=\aleph_\omega$. נראה כי $\mathrm{cf}(A,\lhd)=\aleph_\omega$.

נניח בשלילה כי $\mathrm{cf}(A,\lhd)<\aleph_\omega$. אז קיימים $n<\omega$ ו־$D\subseteq A$ כך ש־D קופינלית ב־$(A,\lhd)$ ו־$|D|=\aleph_n$.

בפרט $D\cap(\{n+1\}\times\aleph_{n+1})$ קבוצה מעוצמה $\le\aleph_n$ הקופינלית בעותק של $\aleph_{n+1}$, בסתירה לכך ש־$\aleph_{n+1}$ סדיר.

שימו לב כי $\{(n,0)\mid n<\omega\}$ אנטי־שרשרת אינסופית בקס"ח $(A,\lhd)$. האם זה מקרי?

משפט 8.31 (Pouzet, 1979):

אם $(A,\lhd)$ קס"ח, ו־$\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה חריג, אז ב־$(A,\lhd)$ יש אנטי־שרשרת אינסופית.

השערה פתוחה (Milner-Sauer, 1981):

אם $(A,\lhd)$ קס"ח, ו־$\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה חריג λ, אז ב־$(A,\lhd)$ יש אנטי־שרשרת מעוצמה $\mathrm{cf}(\lambda)$.