**טענה 8.1** נניח $\alpha$ סודר ו־$\kappa, \lambda$ מונים.
אם $\kappa \le \alpha \le \lambda$, אז $\kappa \le |\alpha| \le \lambda$.

**הוכחה:** ברור כי $|\alpha| \le \alpha \le \lambda$.
כעת, נניח בשלילה כי לא מתקיים $\kappa \le |\alpha|$. אז $|\alpha| < \kappa$, וסה"כ $|\alpha| < \kappa \le \alpha$.
העתקת הזהות $f : \kappa \to \alpha$ היא חח"ע ולכן $|\kappa| \le |\alpha|$. סה"כ $|\alpha| < \kappa = |\kappa| \le |\alpha|$. סתירה. ■

**תרגיל 8.2** כל מונה אינסופי הוא סודר גבולי.

**טענה 8.3** נניח $\gamma$ סודר, ו־$(A, \lhd)$ קבוצה סדורה היטב כך שלכל $a \in A$, מתקיים $\mathrm{otp}(a_\downarrow, \lhd) < \gamma$.
אז $\mathrm{otp}(A, \lhd) \le \gamma$. בפרט $|A| \le |\gamma|$.

**הוכחה:** יהי $\delta := \mathrm{otp}(A, \lhd)$, ונקבע $f : \delta \leftrightarrow A$ שומרת סדר מ־$(\delta, \in)$ ל־$(A, \lhd)$. אם בשלילה, $\gamma < \delta$, אז $\gamma \in \delta$ ועבור $a := f(\gamma)$ נקבל כי $\mathrm{otp}(a_\downarrow, \lhd) = \mathrm{otp}(\gamma_\downarrow, \in) = \gamma$ בסתירה להנחה. ■

**תרגיל 8.4** הראו כי $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ המוגדרת על־ידי הכלל

$$\pi(a, b) := 2^a (2b + 1) - 1$$

היא חד־חד־ערכית ועל.[1]

בפרט, $\omega \odot \omega = \omega$. כעת נכליל זאת לכל מונה אינסופי $\kappa$.

**משפט 8.5** $(Jourdain, 1908)$ נניח $\kappa$ מונה אינסופי. אז $\kappa \odot \kappa = \kappa$.[2]

**הוכחה:** צריך להראות כי $|\kappa \times \kappa| = \kappa$, כלומר, כי קיים סידור טוב של $\kappa \times \kappa$ מטיפוס סדר $\kappa$.
יהי $<_1$ סידור מילוני לועזי של $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$. כלומר, לכל שני זוגות סודרים $(\alpha, \beta)$ ו־$(\alpha', \beta')$:

$$(\alpha', \beta') <_1 (\alpha, \beta) \iff \begin{array}{c} (\alpha' \in \alpha) \ \vee \\ (\alpha' = \alpha \ \wedge \ \beta' \in \beta) \end{array}.$$

כזכור מהרצאה 3, כפל סודרים מתקבל מסדר מילוני עברי. אז השוואה בין ההגדרות מעלה כי לכל שני סודרים $\gamma, \delta$ מתקיים:

$$(\gamma \times \delta, <_1) \cong (\delta \cdot \gamma, \in).$$

בפרט, $<_1$ סידור טוב של $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, ו־$\mathrm{otp}(\kappa \times \kappa, <_1) = \kappa^2$.[3]
כעת נגדיר יחס סדר $<_2$ על $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, כדלקמן. $(\alpha', \beta') <_2 (\alpha, \beta)$ אמ"מ אחד מהבאים מתקיים:

- $\max(\{\alpha', \beta'\}, \in) < \max(\{\alpha, \beta\}, \in)$, או
- $\max(\{\alpha', \beta'\}, \in) = \max(\{\alpha, \beta\}, \in)$ וגם $(\alpha', \beta') <_1 (\alpha, \beta)$.

**תת־טענה:** $<_2$ סידור טוב של $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$.

**הוכחה:** את הבדיקה כי מדובר בסדר קווי נשאיר כתרגיל.
בהנתן קבוצה $X \subseteq \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ לא ריקה, נגדיר

$$\begin{aligned} \delta &:= \min_{\in} \left\{ \max_{\in} \{\alpha, \beta\} \mid (\alpha, \beta) \in X \right\} \\ (\alpha', \beta') &:= \min_{<_1} \left\{ (\alpha, \beta) \in X \mid \max_{\in} \{\alpha, \beta\} = \delta \right\} \end{aligned}$$

אז לכל $(\alpha, \beta) \in X$ מתקיים $\delta < \max_\in \{\alpha, \beta\}$ או $(\alpha', \beta') \le_1 (\alpha, \beta) \ \wedge \ \delta = \max_\in \{\alpha, \beta\}$ .
ולכן $(\alpha', \beta')$ הוא האיבר הראשון ב־$X$.

[1] רמז: לכל מספר טבעי חיובי $n$, התבוננו בפיתוח הבינארי שלו.
[2] פעולת הכפל היא חשבון מונים.
[3] אם $X \subseteq \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ קבוצה, אז קיים סודר גדול מספיק $\delta$ כך ש־$X \subseteq \delta \times \delta$.

**משל תת-טענה**☒

נניח בשלילה כי קיים מונה אינסופי $\kappa$ כך ש-$\kappa \odot \kappa > \kappa$, ויהי $\kappa$ הדוגמא הנגדית הקטנה ביותר.

היות ו-$(\kappa \times \kappa, <_2)$ סדורה היטב, נובע בפרט מטענה 8.3 כי קיים $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$ כך ש-$\kappa \leq \mathrm{otp}\left((\alpha,\beta)_\downarrow, <_2\right)$.
נסמן $\delta := \max\{\alpha, \beta\}$. שימו לב כי מהגדרת $<_2$ נובע כי

$$(\alpha,\beta)_\downarrow = \{(\alpha',\beta') \in \mathrm{On} \times \mathrm{On} \mid (\alpha',\beta') <_2 (\alpha,\beta)\} \subseteq (\delta+1) \times (\delta+1).$$

ולכן

$$\kappa \leq \mathrm{otp}\left((\alpha,\beta)_\downarrow, <_2\right) \leq \mathrm{otp}\left((\delta+1)\times(\delta+1), <_2\right).$$

נסמן $\gamma := \mathrm{otp}\left((\delta+1)\times(\delta+1), <_2\right)$. בפרט $|\gamma| = |(\delta+1)\times(\delta+1)|$.

כיוון ש-$\kappa \leq \gamma$ ו-$\kappa$ מונה, נקבל כי $\kappa \leq |\gamma|$. כלומר

$$\kappa \leq |(\delta+1)\times(\delta+1)|.$$

אם $\delta \in \omega$, הרי ש- $(\delta+1)\times(\delta+1)$ קבוצה סופית, ומקבלים סתירה.

לכן, $\omega \leq \delta < \kappa$, ומכאן כי $\omega < \delta+1 < \kappa$.

נסמן $\mu := |\delta+1|$. אז $\mu$ מונה אינסופי קטן מ-$\kappa$, ולכן ממינימליות $\kappa$, מתקיים $\mu \odot \mu = \mu$.

סה"כ:

$$\begin{aligned}\kappa &\leq |(\delta+1)\times(\delta+1)| \\ &= |\delta+1| \odot |\delta+1| \\ &= \mu \odot \mu = \mu < \kappa\end{aligned}$$

וזוהי סתירה. ■

**טענה 8.6** אם $\lambda$ מונה אינסופי, ו- $\kappa$ מונה כלשהו המקיים $0 < \kappa \leq \lambda$, אז

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \lambda.$$

**הוכחה:** המקרה $\kappa = 1$ טריוויאלי.

נניח $\kappa \geq 2$, אז:

$$\begin{aligned}\lambda &\leq \kappa \oplus \lambda \\ &\leq \lambda \oplus \lambda \\ &= 2 \odot \lambda \\ &\leq \kappa \odot \lambda \\ &\leq \lambda \odot \lambda = \lambda\end{aligned}$$

■

**מסקנה 8.7** $(Hessenberg, 1906)$ אם $\kappa, \lambda$ מונים אינסופיים, אז $\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

**טענה 8.8** נניח $\kappa, \lambda, \theta$ מונים, אז $\kappa \leq \lambda$ גורר $\kappa^\theta \leq \lambda^\theta$.

**הוכחה:** העתקת הזהות היא פונקציה חד-חד-ערכית מ- ${}^\theta\kappa$ ל- ${}^\theta\lambda$. ■

**מסקנה 8.9** אם $\lambda$ מונה אינסופי ו־$\kappa$ מונה המקיים $1 < \kappa \le \lambda$, אז $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.
בפרט, $2^\lambda = \lambda^\lambda$.

**הוכחה:** ראינו כבר כי $\kappa \le \lambda$ גורר $\kappa^\lambda \le \lambda^\lambda$.
נתמקד כעת באי־השיוויון השני:

$$\lambda \underset{\substack{\downarrow \\ \text{קנטור}}}{<} 2^\lambda \underset{\substack{\downarrow \\ 2\le\kappa}}{\le} \kappa^\lambda$$

ולכן

$$\lambda^\lambda \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda<\kappa^\lambda}}{\le} \left(\kappa^\lambda\right)^\lambda \underset{\substack{\downarrow \\ \text{תרגיל מסוף הרצאה 7}}}{=} \kappa^{\lambda\odot\lambda} \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda\odot\lambda=\lambda}}{=} \kappa^\lambda$$

סה"כ $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda$. ■

**טענה 8.10** לכל סודר $\alpha$, מתקיים: $|\alpha| \le \alpha < |\alpha|^+$.
בפרט, $H(\alpha) = |\alpha|^+$.

**הוכחה:** ברור כי $|\alpha| \le \alpha$.
נניח בשלילה $|\alpha|^+ \not< \alpha$. אז $|\alpha|^+ \le \alpha$ וקיימת $f : |\alpha|^+ \to \alpha$ חח"ע.
תהי $g : \alpha \leftrightarrow |\alpha|$ פונקציית שקילות. אז $g \circ f$ חח"ע מ־$|\alpha|^+$ ל־$|\alpha|$.
היות ו־ $|\alpha|^+$ סודר גדול מ־$|\alpha|$, נקבל סה"כ ממשפט מקנטור־ברנשטיין פונקציית שקילות מ־$|\alpha|$ ל־ $|\alpha|^+$,
בסתירה לכך ש־ $|\alpha|^+$ מונה גדול מ־ $|\alpha|$. ■

**הגדרה 8.11** מונה $\kappa$ נקרא עוקב אם קיים מונה $\lambda$ כך ש־ $\kappa = \lambda^+$.

**הגדרה 8.12** מונה $\kappa$ שאינו עוקב נקרא גבולי.

נסמן ב־$\mathrm{Card}(\kappa)$ את קבוצת כל המונים הקטנים מ־$\kappa$. כלומר, $\mathrm{Card}(\kappa) = \{\lambda \in \kappa \mid |\lambda| = \lambda\}$.

**טענה 8.13** אם $\kappa$ מונה גבולי, אז $\kappa = \sup\left(\mathrm{Card}(\kappa)\right)$.

**הוכחה:** יהי $\alpha = \sup(\mathrm{Card}(\kappa))$, ונניח בשלילה $\alpha < \kappa$.
מכאן כי

$$|\alpha| \le \alpha < |\alpha|^+ \le \kappa\ .$$

היות ו־ $\kappa$ אינו מונה עוקב, $\kappa \ne |\alpha|^+$.
כלומר $\kappa > |\alpha|^+$, ואזי $|\alpha|^+ \in \mathrm{Card}(\kappa)$, בסתירה לכך ש־ $\sup\left(\mathrm{Card}(\kappa)\right) = \alpha < |\alpha|^+$. ■

**טענה 8.14** אם $A$ קבוצה של מונים, אז $\bigcup A$ מונה.

**הוכחה:** נסמן $\alpha := \bigcup A$. בהרצאה 2 ראינו כי $\alpha$ סודר.
אם $\alpha$ איננו מונה, אז $|\alpha| < \alpha$, ומכיוון ש־ $\sup(A) = \alpha > |\alpha|$, קיים $\lambda \in A$ כך ש־ $\alpha \ge \lambda > |\alpha|$.
כיוון ש־ $\alpha$ אינו מונה, מתקיים $\alpha > \lambda$, ואז

$$|\alpha| < \lambda < \alpha < |\alpha|^+\ .$$

אך אז $\lambda$ מונה הממוקם בין $|\alpha|$ לבין $|\alpha|^+$, בסתירה להגדרת $|\alpha|^+$. ■

**הגדרה 8.15** מגדירים את האלפים ברקורסיה על הסודרים:

1. $\aleph_0 := \omega$
2. $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$
3. אם $\alpha$ גבולי $0 <$, אז

$$\aleph_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta.$$

**תרגיל 8.16** $\alpha$ גבולי $\iff$ $\aleph_\alpha$ גבולי. לכן, $\alpha$ עוקב $\iff$ $\aleph_\alpha$ עוקב.

**הערה 8.17** ההעתקה $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ נקראת פונקציית האלף. ננתח אותה בהמשך.

תזכורת: קבוצה $D \subseteq A$ נקראת שולטת/קופינלית בקס"ח $(A,\lhd)$ אמ"מ לכל $a \in A$ קיים $d \in D$ כך ש-$a \trianglelefteq d$ (כלומר: $a \lhd d$ או $a = d$).

**הגדרה 8.18** $\mathrm{cf}(A,\lhd) := \min\{|D| \mid (A,\lhd)$ שולטת ב-$D \subseteq A\}$.

זהו תמיד מונה $\le |A|$.

**טענה 8.19** לכל קס"ח $(A,\lhd)$ קיימת פונקציה $f : \mathrm{cf}(A,\lhd) \to A$ המקיימת:

1. $f$ חד-חד-ערכית.
2. אם $f(\alpha) \lhd f(\beta)$, אז $\alpha \in \beta$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ קופינלית ב- $(A,\lhd)$.

**הוכחה:** נסמן $\kappa := \mathrm{cf}(A,\lhd)$, ותהי $D \subseteq A$ קופינליות מעוצמה $\kappa$.

תהי $g : \kappa \leftrightarrow D$ פונקציית שקילות כלשהי. נסמן

$$X := \{\alpha \in \kappa \mid \forall\beta < \alpha\ \neg(g(\alpha) \lhd g(\beta))\}.$$

אז $g[X]$ קופינלית ב-$(A,\lhd)$, ומכאן כי $|X| = \kappa$.[4]

תהי $\pi : \kappa \to X$ איזומורפיזם שומר סדר מ- $(\kappa,\in)$ ל- $(X,\in)$.

אז $f = g \circ \pi$ חח"ע, $\mathrm{Im}(f) = g[X]$ קופינלית, ותנאי 2 מתקיים מעצם הגדרת $X$. ■

**מסקנה 8.20** אם $(A,\lhd)$ סדורה קווית, אז $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(A,\lhd),\in) = \mathrm{cf}(A,\lhd)$.

**הוכחה:** נסמן $\kappa := \mathrm{cf}(A,\lhd)$ ו-$\theta := \mathrm{cf}(\kappa,\in)$.

תהי $f : \kappa \to A$ פונקציה המובטחת ע"י הטענה הקודמת.

כיוון ש- $(A,\lhd)$ סדורה קווית, סעיף 2 בעצם אומר כי $f$ שומרת סדר.

נניח בשלילה כי $\theta < \kappa$. אז מפניה נוספת לטענה הקודמת, קיימת $g : \theta \to \kappa$ שתמונתה קופינלית ב- $(\kappa,\in)$.

נראה כעת כי $(f\circ g) : \theta \to A$ פונקציה שתמונתה קופינלית ב- $(A,\lhd)$, **בסתירה** לכך ש- $\theta < \mathrm{cf}(A,\lhd)$.

יהי $a \in A$ כלשהו. כיוון שתמונת $f$ קופינלית, ניתן למצוא $\alpha \in \kappa$ כך ש-$a \trianglelefteq f(\alpha)$.

כיוון שתמונת $g$ קופינלית, יהי $\beta \in \theta$ כך ש-$\alpha \le g(\beta)$. אז

$$(f\circ g)(\beta) = f(g(\beta)) \underset{\text{שומרת סדר}}{\trianglerighteq} f(\alpha) \trianglerighteq a.$$

■

[4] זכרו כי $\kappa = \mathrm{cf}(A,\lhd)$.

**הגדרה 8.21** מונה $\kappa$ נקרא סדיר (regular) אמ"מ $\mathrm{cf}(\kappa,\in)=\kappa$.

**הגדרה 8.22** מונה $\kappa$ נקרא חריג (singular) אמ"מ $\mathrm{cf}(\kappa,\in)\neq\kappa$. כלומר, אמ"מ $\mathrm{cf}(\kappa,\in)<\kappa$.

ראינו: אם $(A,\lhd)$ סדר קווי, אז $\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה סדיר.

בפרט: לכל סודר $\alpha$, $\mathrm{cf}(\alpha,\in)$ מונה סדיר.

**הערה 8.23** אם $\alpha$ סודר, נהוג לכתוב $\mathrm{cf}(\alpha)$ במקום $\mathrm{cf}(\alpha,\in)$.

**תרגיל 8.24** אם $\alpha$ סודר גבולי $>0$ , אז $\omega\leq\mathrm{cf}(\alpha)$.

**טענה 8.25** לכל מונה אינסופי $\kappa$, $\kappa^+$ הוא מונה סדיר.

**הוכחה:** נניח בשלילה כי $\kappa^+$ חריג.

מכאן, כי קיימת $D\subseteq\kappa^+$ קופינלית מעוצמה $\leq\kappa$.

מהגדרת $\kappa^+$, לכל $\alpha<\kappa^+$ מתקיים $|\alpha|\leq\kappa$, ולכן סה"כ:

1. $|D|\leq\kappa$,
2. לכל $\alpha\in D$: $|\alpha_\downarrow\cup\{\alpha\}|=|\alpha+1|\leq\kappa$.

כיוון ש- $D$ שולטת, לכל $\beta\in\kappa^+$ קיים $\alpha\in D$ כך ש- $\beta\in\alpha_\downarrow\cup\{\alpha\}$.

כלומר,

$$\kappa^+=\bigcup\{\alpha_\downarrow\cup\{\alpha\}\mid\alpha\in D\}.$$

התקבל כי $\kappa^+$ הוא איחוד של $\leq\kappa$ קבוצות, כל אחת מעוצמה $\leq\kappa$.

הטענה הבאה, לכן, מובילה לסתירה. ■

**טענה 8.26** נניח $\kappa$ מונה אינסופי, $\{A_i\mid i\in I\}$ קבוצה של קבוצות, ומתקיים:

1. $|I|\leq\kappa$.
2. $|A_i|\leq\kappa$ לכל $i\in I$.

אז $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\leq\kappa$.

**הוכחה:** מהנתון 2, לכל $i\in I$, הקבוצה

$$G_i=\{g:A_i\to\kappa\mid g \text{ חח"ע}\}$$

איננה ריקה.

תהי $f$ פונקצית בחירה עבור $\mathcal{S}:=\{G_i\mid i\in I\}$.

אז לכל $i\in I$, $f(i)$ פונקציה חח"ע מ- $A_i$ ל- $\kappa$.

מהנתון 1, נקבע פונקציה $g:I\to\kappa$ חח"ע, ונשרה סדר טוב $\lhd$ על $I$: $i\lhd j\iff g(i)\in g(j)$.

לכל $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$, נגדיר

$$i_x:=\min_{\lhd}\{i\in I\mid x\in A_i\}.$$

ממשפט 8.5, תהי $\pi:\kappa\times\kappa\leftrightarrow\kappa$ פונקציית שקילות, ולבסוף נגדיר

$$h:\bigcup_{i\in I}A_i\to\kappa$$

על-ידי הכלל

$$h(x):=\pi(g(i_x),f(i_x)(x))$$

נראה כי $h$ חח"ע:

נניח $x,y$ שונים ב- $\bigcup_{i\in I}A_i$.

- אם $i_x \neq i_y$, אז כיוון ש־ $g$ חח"ע, $g(i_x) \neq g(i_y)$, ואז כיוון ש־$\pi$ חח"ע:

$$h(x) = \pi(g(i_x), \square) \neq \pi(g(i_y), \square) = h(y)$$

- אם $i^* = i_x = i_y$, אז כיוון ש־ $f(i^*)$ חח"ע, מתקיים $f(i^*)(x) \neq f(i^*)(y)$, ואז כיוון ש־$\pi$ חח"ע:

$$h(x) = \pi(\square, f(i^*)(x)) \neq \pi(\square, f(i^*)(y)) = h(y)$$

■

**מסקנה 8.27** $\aleph_{\alpha+1}$ מונה סדיר לכל סודר $\alpha$.

**הבחנה 8.28** $\aleph_\omega$ מונה חריג.

**הוכחה:** הקבוצה $D := \{\aleph_n \mid n < \omega\}$ קופינלית ב־ $(\aleph_\omega, \in)$. אך $|D| = \aleph_0 < \aleph_\omega$. ■

**דוגמא 8.29** יהי $A := \bigcup_{n<\omega}(\{n\} \times \aleph_n)$. נתבונן בקס"ח $(A, \lhd)$ כאשר $(n,\alpha) \lhd (m,\beta)$ אמ"מ $\alpha \in \beta$ ו־$n = m$.
כלומר $(A, \lhd)$ הוא "סכום זר" של הקס"חים $\{(\aleph_n, \in) \mid n < \omega\}$.

ברור כי $\mathrm{cf}(A, \lhd) \leq |A| = \aleph_\omega$. נראה כי $\mathrm{cf}(A, \lhd) = \aleph_\omega$.

נניח בשלילה כי $\mathrm{cf}(A, \lhd) < \aleph_\omega$. אז קיימים $n < \omega$ ו־$D \subseteq A$ כך ש־$D$ קופינלית ב־$(A, \lhd)$ ו־$|A| = \aleph_n$.

בפרט $D \cap (\{n+1\} \times \aleph_{n+1})$ קבוצה מעוצמה $\leq \aleph_n$ הקופינלית בעותק של $\aleph_{n+1}$, בסתירה לכך ש־$\aleph_{n+1}$ סדיר.

שימו לב כי $\{(n, 0) \mid n < \omega\}$ אנטי־שרשרת אינסופית בקס"ח $(A, \lhd)$. האם זה מקרי?

**משפט 8.30** (Pouzet, 1979):

אם $(A, \lhd)$ קס"ח, ו־$\mathrm{cf}(A, \lhd)$ מונה חריג, אז ב־$(A, \lhd)$ יש אנטי־שרשרת אינסופית.

**השערה פתוחה** (Milner-Sauer, 1981):

אם $(A, \lhd)$ קס"ח, ו־$\mathrm{cf}(A, \lhd)$ מונה חריג $\lambda$, אז ב־$(A, \lhd)$ יש אנטי־שרשרת מעוצמה $\mathrm{cf}(\lambda)$.

### נספח - תוספת על אקסיומת הבחירה

**משפט 8.31** (Tarski, 1924): מעל ZF,

עקרון הסדר הטוב שקול לטענה כי לכל קבוצה אינסופית $A$, קיימת $f : A \leftrightarrow A \times A$ חח"ע ועל.

**הוכחה:** ($\Leftarrow$) מעקרון הסדר הטוב, לכל קבוצה אינסופית $A$ קיים סודר שהוא מונה אינסופי $\kappa$ ופונקציה $g_A : A \leftrightarrow \kappa$ חח"ע ועל. ממשפט 8.5, קיימת $h : \kappa \leftrightarrow \kappa \times \kappa$ חח"ע ועל.

נגדיר $f : A \leftrightarrow A \times A$ ע"י $f(a) := (b, c)$ אמ"מ $h(g_A(a)) = (g_A(b), g_A(c))$. אז $f$ כמבוקש.

($\Rightarrow$) נניח $B$ קבוצה אינסופית. נבקש לסדר את $B$ בסידור טוב. נגדיר

$$.\theta(B) := \{\alpha \in \mathrm{On} \mid f : B \to \alpha \text{ surjective}\}$$

אז $\theta(B)$ סודר (ואפילו מונה), וזהו הסודר $\delta$ הקטן ביותר כך שאין פונקציה $f : B \to \delta$ על.

בלי הגבלת הכלליות, $B \cap \theta(B) = \emptyset$.[5]

נסמן $A := B \uplus \theta(B)$. אז מההנחה, נוכל לקבוע פונקציה חד־חד־ערכית ועל $f : A \leftrightarrow A \times A$.

[5] אחרת, ניקח $\overline{B} = B \times \{0\}$. אז $\theta(\overline{B}) = \theta(B)$ ו־$b \mapsto (b, 0)$ חד־חד־ערכי ועל.

**תת־טענה:** לכל $b \in B$, מתקיים $f[\theta(B)] \cap (\theta(B) \times \{b\}) \neq \emptyset$.

**הוכחה:** נניח $b$ דוגמה נגדית. כיוון ש־$f$ על ו־$\operatorname{dom}(f) = B \uplus \theta(B)$ נובע כי $(\theta(B) \times \{b\}) \subseteq f[B]$,
וניתן לקחת $g : B \to \theta(B)$ המקיימת $g(x) = \alpha$ כל אימת ש־ $f(x) = (\alpha, b)$.
אך אז $g$ על בסתירה להגדרת $\theta(B)$.

**משל תת־טענה**$\boxtimes$

נגדיר $f : B \to \theta(B)$ ע"י הכלל:

$$f(b) := \min \{\gamma \in \theta(B) \mid f(\gamma) \in \theta(B) \times \{b\}\}.$$

ברור כי $f$ חח"ע. אז $f$ משכן את $B$ בתוך הקבוצה הסדורה היטב $(\theta(B), \in)$, ובכך משרה סדר טוב על $B$. $\blacksquare$