תזכורת מהשיעור שעבר: אם $(A,\lhd)$ סדורה היטב, אז $|A|\leq \mathrm{otp}(A,\lhd)$.

**טענה 8.1** נניח $\alpha$ סודר ו־$\kappa,\lambda$ מונים.
אם $\kappa\leq\alpha\leq\lambda$, אז $\kappa\leq|\alpha|\leq\lambda$.

**הוכחה:** ברור כי $|\alpha|\leq\alpha\leq\lambda$.
כעת, נניח בשלילה כי לא מתקיים $\kappa\leq|\alpha|$. אז $|\alpha|<\kappa$, וסה"כ $|\alpha|<\kappa\leq\alpha$.
העתקת הזהות $f:\kappa\to\alpha$ היא חח"ע ולכן $|\kappa|\leq|\alpha|$. סה"כ $|\alpha|\leq|\kappa|=\kappa<|\alpha|$. זוהי סתירה. ■

**תרגיל 8.2** הראו כי כל מונה אינסופי הוא סודר גבולי.

**טענה 8.3** נניח $\gamma$ סודר, ו־$(A,\lhd)$ קבוצה סדורה היטב כך שלכל $a\in A$, מתקיים $\mathrm{otp}(a_\downarrow,\lhd)<\gamma$.
אז $\mathrm{otp}(A,\lhd)\leq\gamma$. בפרט $|A|\leq|\gamma|$.

**הוכחה:** יהי $\delta:=\mathrm{otp}(A,\lhd)$, ונקבע $f:\delta\leftrightarrow A$ שומרת סדר מ־$(\delta,\in)$ ל־$(A,\lhd)$.
אם בשלילה, $\gamma<\delta$, אז $\gamma\in\mathrm{dom}(f)$ ועבור $a:=f(\gamma)$ נקבל כי $\gamma=\mathrm{otp}(\gamma_\downarrow,\in)=\mathrm{otp}(a_\downarrow,\lhd)$ בסתירה להנחה. ■

**תרגיל 8.4** הראו כי $\pi:\omega\times\omega\to\omega$ המוגדרת על־ידי הכלל

$$\pi(a,b):=2^a(2b+1)-1$$

היא חד־חד־ערכית ועל.[1]

בפרט, $\omega\odot\omega=\omega$. כעת נכליל זאת לכל מונה אינסופי $\kappa$.

**משפט 8.5** (Jourdain, 1908) נניח $\kappa$ מונה אינסופי. אז $\kappa\odot\kappa=\kappa$.[2]

**הוכחה:** צריך להראות כי לכל מונה אינסופי $\kappa$, מתקיים $|\kappa\times\kappa|=\kappa$, כלומר, כי קיים סידור טוב של $\kappa\times\kappa$ מטיפוס סדר $\kappa$.

אנו נראה כי, יתר על כן, קיים סידור טוב $\lhd$ של כל $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ כך ש־$\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,\lhd)=\kappa$ לכל מונה אינסופי $\kappa$.

בשלב ראשון, יהי $<_1$ סידור מילוני עברי של $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$. כלומר, לכל שני זוגות סודרים $(\alpha,\beta)$ ו־$(\alpha',\beta')$:

$$(\alpha,\beta)<_1(\alpha',\beta') \iff \begin{array}{c}(\beta\in\beta')\ \vee\\ (\beta=\beta'\ \wedge\ \alpha\in\alpha')\end{array}.$$

כזכור מהרצאה 3, $<_1$ מהווה סידור טוב, ולכל סודר $\kappa$ מתקיים $\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_1)=\kappa^2$.

בשלב שני, נגדיר יחס סדר $<_2$ על $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$, כדלקמן. $(\alpha,\beta)<_2(\alpha',\beta')$ אמ"מ אחד מהבאים מתקיים:

- $\max(\{\alpha,\beta\},\in)<\max(\{\alpha',\beta'\},\in)$, או
- $\max(\{\alpha,\beta\},\in)=\max(\{\alpha',\beta'\},\in)$ וגם $(\alpha,\beta)<_1(\alpha',\beta')$.

**תת־טענה:** $<_2$ סידור טוב של $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$.

[1] רמז: לכל מספר טבעי חיובי $n$, התבוננו בפיתוח הבינארי שלו.
[2] פעולת הכפל היא חשבון מונים.

**הוכחה:** קל לראות כי $<_2$ הוא אנטי־רפלקסיבי.

כדי להראות כי $<_2$ טרנזיטיבי, נניח $(\alpha,\beta) <_2 (\alpha',\beta')$ ו־$(\alpha',\beta') <_2 (\alpha'',\beta'')$, עבור שלוש זוגות כלשהן, ונראה $(\alpha,\beta) <_2 (\alpha'',\beta'')$.

- אם $\max_\in\{\alpha,\beta\} < \max_\in\{\alpha'',\beta''\}$, הרי שסיימנו.
- אחרת, נובע מההנחה כי $\max_\in\{\alpha,\beta\} = \max_\in\{\alpha',\beta'\} = \max_\in\{\alpha'',\beta''\}$, ולכן

$$(\alpha,\beta) <_1 (\alpha',\beta') <_1 (\alpha'',\beta'').$$

היות ו־$<_1$ יחס טרנזיטיבי. הרי ש־$(\alpha,\beta) <_1 (\alpha'',\beta'')$. סה"כ: $(\alpha,\beta) <_2 (\alpha'',\beta'')$.

הלאה. נניח כי $X \subseteq \mathrm{On}\times\mathrm{On}$ קבוצה לא ריקה. נגדיר

$$\begin{aligned}\delta &:= \min_\in\left\{\max_\in\{\alpha,\beta\} \mid (\alpha,\beta)\in X\right\}\\ (\alpha^*,\beta^*) &:= \min_{<_1}\left\{(\alpha,\beta)\in X \mid \max_\in\{\alpha,\beta\} = \delta\right\}\end{aligned}$$

אז לכל $(\alpha,\beta) \in X$ מתקיים $\delta < \max_\in\{\alpha,\beta\}$ או $\delta = \max_\in\{\alpha,\beta\} \ \wedge\ (\alpha^*,\beta^*) \le_1 (\alpha,\beta)$ .

ולכן $(\alpha',\beta')$ הוא האיבר הראשון ב־$X$.

**מש"ל תת־טענה**☒

כעת ניגש להוכחת המשפט. נניח בשלילה כי קיים מונה אינסופי $\kappa$ כך ש־$\kappa \neq \mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_2)$.

כיוון ש־$\kappa$ מונה וקיימת פונקציה חח"ע מ־$\kappa$ ל־$\kappa\times\kappa$, נקבל $\kappa = |\kappa| \le |\kappa\times\kappa| \le \mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_2)$.

לכן $\kappa < \mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,<_2)$. בפרט, נובע מטענה 8.3 כי קיים $(\alpha,\beta)\in\kappa\times\kappa$ כך ש־$\kappa \le \mathrm{otp}((\alpha,\beta)_\downarrow,<_2)$.

נסמן $\delta := \max\{\alpha,\beta\}$. שימו לב כי מהגדרת $<_2$ נובע כי

$$(\alpha,\beta)_\downarrow = \{(\alpha',\beta')\in\mathrm{On}\times\mathrm{On} \mid (\alpha',\beta') <_2 (\alpha,\beta)\} \subseteq (\delta+1)\times(\delta+1).$$

נסמן $\gamma := \mathrm{otp}((\delta+1)\times(\delta+1),<_2)$. אז

$$\kappa \le \mathrm{otp}((\alpha,\beta)_\downarrow,<_2) \le \mathrm{otp}((\delta+1)\times(\delta+1),<_2) = \gamma.$$

כיוון ש־$\kappa \le \gamma$ ו־$\kappa$ מונה, נקבל כי $\kappa \le |\gamma|$. אז, מהגדרת $\gamma$ נובע:

$$\kappa \le |\gamma| = |(\delta+1)\times(\delta+1)|.$$

אם $\delta\in\omega$, הרי ש־ $(\delta+1)\times(\delta+1)$ קבוצה סופית, ומקבלים סתירה.

לכן, $\omega \le \delta < \kappa$. היות ו־$\kappa$ הוא מונה אינסופי, הרי שהוא מונה גבולי, ולכן גם $\omega < \delta+1 < \kappa$.

נסמן $\mu := |\delta+1|$. אז $\mu$ מונה אינסופי קטן מ־$\kappa$, ולכן ממינימליות $\kappa$, מתקיים $\mu = \mathrm{otp}(\mu\times\mu,<_2)$. בפרט, $\mu\odot\mu = \mu$.

סה"כ:

$$\begin{aligned}\kappa &\le |(\delta+1)\times(\delta+1)|\\ &= |\delta+1|\odot|\delta+1|\\ &= \mu\odot\mu = \mu < \kappa\end{aligned}$$

וזוהי סתירה. ■

**טענה 8.6** אם $\lambda$ מונה אינסופי, ו־ $\kappa$ מונה כלשהו המקיים $0 < \kappa \le \lambda$, אז

$$\kappa\oplus\lambda = \kappa\odot\lambda = \lambda.$$

**הוכחה:** המקרה $\kappa = 1$ טריוויאלי.

נניח $\kappa \geq 2$, אז:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \kappa \oplus \lambda \\ &\leq \lambda \oplus \lambda \\ &= 2 \odot \lambda \\ &\leq \kappa \odot \lambda \\ &\leq \lambda \odot \lambda = \lambda \end{aligned}$$

■

**מסקנה 8.7** (Hessenberg, 1906) אם $\kappa, \lambda$ מונים אינסופיים, אז $\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

**טענה 8.8** נניח $\kappa, \lambda, \theta$ מונים ומתקיים $\kappa \leq \lambda$. אז $\kappa^\theta \leq \lambda^\theta$.

**הוכחה:** העתקת הזהות היא פונקציה חד־חד־ערכית מ־ $\kappa^\theta$ ל־ $\lambda^\theta$. ■

**מסקנה 8.9** אם $\lambda$ מונה אינסופי ו־$\kappa$ מונה המקיים $1 < \kappa \leq \lambda$, אז $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.

בפרט, $2^\lambda = \lambda^\lambda$.

**הוכחה:** ראינו כבר כי $\kappa \leq \lambda$ גורר $\kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda$.

נתמקד כעת באי־השיוויון השני:

$$\lambda \underset{\text{קנטור}}{\underset{\downarrow}{<}} 2^\lambda \underset{2 \leq \kappa}{\underset{\downarrow}{\leq}} \kappa^\lambda$$

ולכן

$$\lambda^\lambda \underset{\lambda < \kappa^\lambda}{\underset{\downarrow}{\leq}} \left(\kappa^\lambda\right)^\lambda \underset{\text{תרגיל מסוף הרצאה 7}}{\underset{\downarrow}{=}} \kappa^{\lambda \odot \lambda} \underset{\lambda \odot \lambda = \lambda}{\underset{\downarrow}{=}} \kappa^\lambda$$

סה"כ $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda$. ■

**טענה 8.10** לכל סודר $\alpha$, מתקיים: $|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+$.

בפרט, $H(\alpha) = |\alpha|^+$.

**הוכחה:** ברור כי $|\alpha| \leq \alpha$.

נניח בשלילה $|\alpha|^+ \not< \alpha$. אז $|\alpha|^+ \leq \alpha$ וקיימת $f : |\alpha|^+ \to \alpha$ חח"ע.

תהי $g : \alpha \leftrightarrow |\alpha|$ פונקציית שקילות. אז $g \circ f$ היא פונקציה חח"ע מ־$|\alpha|^+$ ל־$|\alpha|$.

היות ו־ $|\alpha|^+$ סודר גדול מ־$|\alpha|$, נקבל סה"כ ממשפט מקנטור־ברנשטיין פונקציית שקילות מ־$|\alpha|$ ל־ $|\alpha|^+$,

בסתירה לכך ש־ $|\alpha|^+$ מונה גדול מ־ $|\alpha|$. ■

**הגדרה 8.11** מונה $\kappa$ נקרא עוקב אם קיים מונה $\lambda$ כך ש־ $\kappa = \lambda^+$.

**הגדרה 8.12** מונה $\kappa$ שאינו עוקב נקרא גבולי.

נסמן ב־$\mathrm{Card}(\kappa)$ את קבוצת כל המונים הקטנים מ־$\kappa$. כלומר, $\mathrm{Card}(\kappa) = \{\lambda \in \kappa \mid |\lambda| = \lambda\}$.

**טענה 8.13** אם $\kappa$ מונה גבולי, אז $\kappa = \sup(\mathrm{Card}(\kappa))$.

**הוכחה:** נסמן $\alpha := \sup(\mathrm{Card}(\kappa))$. נניח בשלילה $\alpha < \kappa$. מכאן כי

$$|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+ \leq \kappa.$$

היות ו־ $\kappa$ אינו מונה עוקב, $\kappa \neq |\alpha|^+$. כלומר $|\alpha|^+ < \kappa$.

התקבל כי $|\alpha|^+ \in \mathrm{Card}(\kappa)$, בסתירה לכך ש־ $\sup(\mathrm{Card}(\kappa)) = \alpha < |\alpha|^+$. ∎

**טענה 8.14** אם $A$ קבוצה של מונים, אז $\bigcup A$ מונה.

**הוכחה:** נסמן $\alpha := \bigcup A$. בהרצאה 2 ראינו כי $\alpha$ סודר.

אם $\alpha$ איננו מונה, אז $|\alpha| < \alpha$, ומכיוון ש־ $\sup(A) = \alpha > |\alpha|$, קיים $\lambda \in A$ כך ש־ $\alpha \geq \lambda > |\alpha|$.

כיוון ש־ $\alpha$ אינו מונה, מתקיים $\lambda < \alpha$, ואז

$$|\alpha| < \lambda < \alpha < |\alpha|^+.$$

אך אז $\lambda$ מונה הממוקם בין $|\alpha|$ לבין $|\alpha|^+$, בסתירה להגדרת $|\alpha|^+$. ∎

**הגדרה 8.15** מגדירים את האלפים ברקורסיה על הסודרים:

1. $\aleph_0 := \omega$
2. $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$
3. לכל $\alpha$ גבולי $> 0$:

$$\aleph_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \aleph_\beta.$$

**תרגיל 8.16** $\alpha$ גבולי $\iff$ $\aleph_\alpha$ גבולי. לכן, $\alpha$ עוקב $\iff$ $\aleph_\alpha$ עוקב.

**הערה 8.17** ההעתקה $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ נקראת פונקציית האלף. ננתח אותה בהמשך.

תזכורת: קבוצה $D \subseteq A$ נקראת שולטת/קופינלית בקס"ח $(A, \lhd)$ אמ"מ לכל $a \in A$ קיים $d \in D$ כך ש־$a \unlhd d$ (כלומר: $a \lhd d$ או $a = d$).

**הגדרה 8.18** $\mathrm{cf}(A, \lhd) := \min\{|D| \mid (A,\lhd)\text{-שולטת ב} \ D \subseteq A\}$.

זהו תמיד מונה $\leq |A|$.

**טענה 8.19** לכל קס"ח $(A, \lhd)$, קיימת פונקציה $f : \mathrm{cf}(A, \lhd) \to A$ המקיימת:

1. $f$ חד־חד־ערכית.
2. אם $f(\alpha) \lhd f(\beta)$, אז $\alpha \in \beta$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ קופינלית ב־ $(A, \lhd)$.

**הוכחה:** נסמן $\kappa := \mathrm{cf}(A, \lhd)$, ותהי $D \subseteq A$ קופינליות מעוצמה $\kappa$.

תהי $g : \kappa \leftrightarrow D$ פונקציית שקילות כלשהי. נסמן

$$X := \{\alpha \in \kappa \mid \forall \beta < \alpha \ \neg(g(\alpha) \lhd g(\beta))\}.$$

אז $g[X]$ קופינלית ב־$(A, \lhd)$, ומכאן כי $|X| = \kappa$.[3]

תהי $\pi : X \to \kappa$ איזומורפיזם שומר סדר מ־ $(X, \in)$ ל־ $(\kappa, \in)$.

אז $f := g \circ \pi^{-1}$ פונקציה חח"ע, $\mathrm{Im}(f) = g[X]$ קופינלית, ותנאי 2 מתקיים מעצם הגדרת $X$. ∎

[3] זכרו כי $\kappa = \mathrm{cf}(A, \lhd)$.

**מסקנה 8.20** אם $(A,\lhd)$ סדורה קווית, אז $\mathrm{cf}(A,\lhd) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(A,\lhd),\in)$.

**הוכחה:** נסמן $\kappa := \mathrm{cf}(A,\lhd)$ ו-$\theta := \mathrm{cf}(\kappa,\in)$.

תהי $f:\kappa\to A$ פונקציה המובטחת ע"י טענה 8.19.

כיוון ש- $(A,\lhd)$ סדורה קווית, סעיף 2 בעצם אומר כי $f$ שומרת סדר.

נניח בשלילה כי $\theta<\kappa$. אז מפניה נוספת לטענה 8.19, קיימת $g:\theta\to\kappa$ שתמונתה קופינלית ב- $(\kappa,\in)$.

נראה כעת כי $(f\circ g):\theta\to A$ פונקציה שתמונתה קופינלית ב- $(A,\lhd)$, **בסתירה** לכך ש- $\theta<\mathrm{cf}(A,\lhd)$.

יהי $a\in A$ כלשהו. כיוון שתמונת $f$ קופינלית, ניתן למצוא $\alpha\in\kappa$ כך ש-$a\unlhd f(\alpha)$.

כיוון שתמונת $g$ קופינלית, יהי $\beta\in\theta$ כך ש-$\alpha\le g(\beta)$. אז

$$a \unlhd f(\alpha) \underset{\text{שומרת סדר}}{\underset{\downarrow}{\unlhd}} f\left(g(\beta)\right) = \left(f\circ g\right)(\beta)\ .$$

■

**הגדרה 8.21** מונה $\kappa$ נקרא סדיר (regular) אמ"מ $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa,\in)$.

**הגדרה 8.22** מונה $\kappa$ נקרא חריג (singular) אמ"מ $\kappa\neq\mathrm{cf}(\kappa,\in)$. כלומר, אמ"מ $\kappa<\mathrm{cf}(\kappa,\in)$.

ראינו: אם $(A,\lhd)$ סדר קווי, אז $\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה סדיר.

בפרט: לכל סודר $\alpha$, $\mathrm{cf}(\alpha,\in)$ מונה סדיר.

**הערה 8.23** אם $\alpha$ סודר, נהוג לכתוב $\mathrm{cf}(\alpha)$ במקום $\mathrm{cf}(\alpha,\in)$.

**תרגיל 8.24** אם $\alpha$ סודר גבולי $>0$ , אז $\omega\le\mathrm{cf}(\alpha)$.

**משפט 8.25** (האוסדורף, 1908) לכל מונה אינסופי $\kappa$, $\kappa^+$ הוא מונה סדיר.

**הוכחה:** נניח בשלילה כי $\kappa^+$ חריג.

מכאן, כי קיימת $D\subseteq\kappa^+$ קופינלית מעוצמה $\le\kappa$.

מהגדרת $\kappa^+$, לכל $\alpha<\kappa^+$ מתקיים $|\alpha|\le\kappa$, ולכן סה"כ:

1. $|D|\le\kappa$,
2. לכל $\alpha\in D$: $|\alpha_\downarrow\cup\{\alpha\}| = |\alpha+1|\le\kappa$.

כיוון ש- $D$ שולטת, לכל $\beta\in\kappa^+$ קיים $\alpha\in D$ כך ש- $\beta\in\alpha_\downarrow\cup\{\alpha\}$.

כלומר,

$$\kappa^+ = \bigcup\left\{\alpha_\downarrow\cup\{\alpha\}\mid\alpha\in D\right\}.$$

התקבל כי $\kappa^+$ הוא איחוד של $\le\kappa$ קבוצות, כל אחת מעוצמה $\le\kappa$.

הטענה הבאה, לכן, מובילה לסתירה. ■

**טענה 8.26** נניח $\kappa$ מונה אינסופי, $\{A_i\mid i\in I\}$ קבוצה של קבוצות, ומתקיים:

1. $|I|\le\kappa$,
2. $|A_i|\le\kappa$ לכל $i\in I$.

אז $|\bigcup_{i\in I} A_i| \leq \kappa$.

**הוכחה:** ממשפט 8.5, מספיק להראות כי קיימת פונקציה חח"ע מ־$\bigcup_{i\in I} A_i$ ל־$\kappa\times\kappa$.

מהנתון 1 ומאקסיומת הבחירה, נוכל לקבוע פונקציה $g:\kappa\to I$ שהיא על.

לכל $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, נגדיר

$$\alpha_x := \min\{\alpha<\kappa \mid x\in A_{g(\alpha)}\}.$$

מהנתון 2, לכל $\alpha<\kappa$, הקבוצה הבאה איננה ריקה:

$$T_\alpha := \left\{\pi : A_{g(\alpha)}\to\kappa \mid \pi \text{ חח"ע}\right\}.$$

מאקסיומת הבחירה, לכן, קיימת פונקציה $f:\kappa\to\bigcup_{\alpha<\kappa} T_\alpha$ כך ש־$f(\alpha)\in T_\alpha$ לכל $\alpha<\kappa$.

במילים פשוטות, לכל $\alpha<\kappa$, $f(\alpha)$ היא פונקציה חח"ע מ־ $A_{g(\alpha)}$ ל־ $\kappa$.

לבסוף, נגדיר פונקציה

$$h:\bigcup_{i\in I} A_i\to\kappa\times\kappa$$

על־ידי הכלל

$$h(x) := (\alpha_x, f(\alpha_x)(x)).$$

נראה כי $h$ חח"ע. לשם כך, נניח $x,y$ איברים שונים ב־ $\bigcup_{i\in I} A_i$.

- אם $\alpha_x\neq\alpha_y$, אז בוודאי $h(x)\neq h(y)$.
- אם $\alpha_x=\alpha_y$, אז כיוון ש־$f(\alpha_x)$ פונקציה חח"ע, נקבל

$$h(x) = (\alpha_x, f(\alpha_x)(x)) \neq (\alpha_x, f(\alpha_x)(y)) = (\alpha_y, f(\alpha_y)(y)) = h(y).$$

■

**מסקנה 8.27** $\aleph_{\alpha+1}$ מונה סדיר לכל סודר $\alpha$.

**תרגיל 8.28** נגדיר $(A,\lhd)$ קס"ח ומתקיים $1<\mathrm{cf}(A,\lhd)<\omega$.

הוכיחו כי $(A,\lhd)$ איננה סדורה קווית.

**הבחנה 8.29** $\aleph_\omega$ מונה חריג.

**הוכחה:** הקבוצה $D:=\{\aleph_n \mid n<\omega\}$ קופינלית ב־ $(\aleph_\omega,\in)$. אך $|D|=\aleph_0<\aleph_\omega$. ■

**דוגמא 8.30** יהי $A:=\bigcup_{n<\omega}(\{n\}\times\aleph_n)$. נתבונן בקס"ח $(A,\lhd)$ כאשר $(n,\alpha)\lhd(m,\beta)$ אמ"מ $\alpha\in\beta$ ו־$n=m$.
כלומר $(A,\lhd)$ הוא "סכום זר" של הקס"חים $\{(\aleph_n,\in) \mid n<\omega\}$.

ברור כי $\mathrm{cf}(A,\lhd)\leq|A|=\aleph_\omega$. נראה כי $\mathrm{cf}(A,\lhd)=\aleph_\omega$.

נניח בשלילה כי $\mathrm{cf}(A,\lhd)<\aleph_\omega$. אז קיימים $n<\omega$ ו־$D\subseteq A$ כך ש־$D$ קופינלית ב־$(A,\lhd)$ ו־$|D|=\aleph_n$.

בפרט $D\cap(\{n+1\}\times\aleph_{n+1})$ קבוצה מעוצמה $\leq\aleph_n$ הקופינלית בעותק של $\aleph_{n+1}$, בסתירה לכך ש־$\aleph_{n+1}$ סדיר.

שימו לב כי $\{(n,0) \mid n<\omega\}$ אנטי־שרשרת אינסופית בקס"ח $(A,\lhd)$. האם זה מקרי?

**משפט 8.31** (Pouzet, 1979):

אם $(A,\lhd)$ קס"ח, ו־$\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה חריג, אז ב־$(A,\lhd)$ יש אנטי־שרשרת אינסופית.

**השערה פתוחה** (Milner-Sauer, 1981):

אם $(A,\lhd)$ קס"ח, ו־$\mathrm{cf}(A,\lhd)$ מונה חריג $\lambda$, אז ב־$(A,\lhd)$ יש אנטי־שרשרת מעוצמה $\mathrm{cf}(\lambda)$.

### נספח - תוספת על אקסיומת הבחירה

**משפט 8.32** (Tarski, 1924) מעל ZF:

עקרון הסדר הטוב שקול לטענה כי לכל קבוצה אינסופית $A$, קיימת $f : A \leftrightarrow A \times A$ חח"ע ועל.

**הוכחה:** ($\Leftarrow$) מעקרון הסדר הטוב, לכל קבוצה אינסופית $A$ קיים סודר שהוא מונה אינסופי $\kappa$ ופונקציה $g_A : A \leftrightarrow \kappa$ חח"ע ועל. ממשפט 8.5, קיימת $h : \kappa \leftrightarrow \kappa \times \kappa$ חח"ע ועל.

נגדיר $f : A \leftrightarrow A \times A$ ע"י $f(a) := (b, c)$ אמ"מ $h(g_A(a)) = (g_A(b), g_A(c))$. אז $f$ כמבוקש.

($\Rightarrow$) נניח $B$ קבוצה אינסופית. נבקש לסדר את $B$ בסידור טוב. נגדיר

$$\theta(B) := \{\alpha \in \text{On} \mid \exists f : B \to \alpha \text{ surjective}\}.$$

אז $\theta(B)$ סודר (ואפילו מונה), וזהו הסודר $\delta$ הקטן ביותר כך שאין פונקציה $f : B \to \delta$ על.

בלי הגבלת הכלליות, $B \cap \theta(B) = \emptyset$.[4]

נסמן $A := B \uplus \theta(B)$. אז מההנחה, נוכל לקבוע פונקציה חד-חד-ערכית ועל $f : A \leftrightarrow A \times A$.

**תת-טענה:** לכל $b \in B$, מתקיים $f[\theta(B)] \cap (\theta(B) \times \{b\}) \neq \emptyset$.

**הוכחה:** נניח $b$ דוגמה נגדית. כיוון ש-$f$ על ו-$\text{dom}(f) = B \uplus \theta(B)$ נובע כי $f[B] \supseteq (\theta(B) \times \{b\})$, וניתן לקחת $g : B \to \theta(B)$ המקיימת $g(x) = \alpha$ כל אימת ש- $f(x) = (\alpha, b)$.
אך אז $g$ על בסתירה להגדרת $\theta(B)$.

**מש"ל תת-טענה**☒

נגדיר $f : B \to \theta(B)$ ע"י הכלל:

$$f(b) := \min\{\gamma \in \theta(B) \mid f(\gamma) \in \theta(B) \times \{b\}\}.$$

ברור כי $f$ חח"ע. אז $f$ משכן את $B$ בתוך הקבוצה הסדורה היטב $(\theta(B), \in)$, ובכך משרה סדר טוב על $B$. ■

[4] אחרת, ניקח $\overline{B} = B \times \{0\}$. אז $\theta(\overline{B}) = \theta(B)$ ו-$b \mapsto (b, 0)$ חד-חד-ערכי ועל.