תרגיל 9.1 אם α סודר גבולי >0, אז לכל $D \subseteq \alpha$: D קופינלית ב־$(\alpha, \in)$ אמ"מ $\sup(D) = \alpha$.

נזכר בפונקציית ה־ℵ

סימונים:

On- מחלקת הסודרים

CARD- מחלקת המונים

$\mathrm{CARD}(\kappa)$-קבוצת המונים הקטנים מ־κ

ICN- מחלקת המונים האינסופיים

מגדירים ברקורסיה:

$$\aleph : \mathrm{On} \to \mathrm{ICN}$$

על־ידי:

$$\begin{aligned}
\aleph(0) &= \omega \\
\aleph(\alpha+1) &= \aleph(\alpha)^+ \\
\aleph(\alpha) &= \bigcup \{\aleph(\beta) \mid \beta < \alpha\} \ \text{ whenever } \alpha = \sup(\alpha) > 0
\end{aligned}$$

הערה 9.2 נהוג לכתוב $\aleph_\alpha$ במקום $\aleph(\alpha)$. לפעמים גם נכתוב ω_α.

תכונה 1: ℵ התאמה שומרת סדר. כלומר, אם $\alpha < \beta$ אז $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. בפרט ℵ חח"ע.

תכונה 2: ℵ רציפה, כלומר אם α סודר גבולי >0, אז $\aleph_\alpha = \bigcup \{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

תכונה 3: ℵ על ICN.

הוכחה: נניח שלא, ויהי

$$\kappa := \min \{\theta \in \mathrm{ICN} \mid \forall \alpha \in \mathrm{On}\, (\theta \neq \aleph_\alpha)\}.$$

ברור כי $\kappa \neq \aleph_0$.

כמו כן, אם κ מונה עוקב, למשל $\kappa = \lambda^+$, אז ממינימליות κ נובע כי קיים סודר α כך ש־$\lambda = \aleph_\alpha$.

אבל אז $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ בסתירה לבחירת κ.

לכן κ גבולי $> \aleph_0$.

תהי

$$B := \{\beta \in \mathrm{On} \mid \aleph_\beta \in \mathrm{CARD}(\kappa)\}.$$

היות ו־ℵ שומרת סדר, אם $\beta \in B$ ו־$\beta' < \beta$, אז גם $\beta' \in B$.

כלומר, B קבוצה טרנזיטיבית של סודרים, ולכן היא סודר, נסמנו ב־α.

כיוון ש־κ מונה גבולי, נובע מטענה מהרצאה 8 כי $\kappa = \bigcup \mathrm{CARD}(\kappa)$. סה"כ:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \bigcup \mathrm{CARD}(\kappa) \\
&= \bigcup \{\aleph_\beta \mid \beta \in B\} \\
&= \bigcup \{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\} \underset{\text{מהגדרה}}{\underset{\downarrow}{=}} \aleph_\alpha
\end{aligned}$$

בסתירה לבחירת κ. ■

תכונה 4: לכל סודר גבולי $\alpha > 0$ מתקיים $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

הוכחה: נניח B קופינלית ב־$(\alpha, \in)$. אז באופן מיידי הקבוצה $\{\aleph_\beta \mid \beta \in B\}$ קופינלית ב־$(\aleph_\alpha, \in)$.
לכן $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$. כעת נראה כי $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$.
תהי A קופינלית ב־$(\aleph_\alpha, \in)$ מעוצמה $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. נסמן

$$A' := \{H(\gamma) \mid \gamma \in A\}.$$

כיוון ש־$A \subseteq \aleph_\alpha$ ו־$\aleph_\alpha$ מונה גבולי, מתקיים גם $A' \subseteq \aleph_\alpha$. כיוון ש־$H(\gamma)$ מונה גדול מ־γ לכל $\gamma \in A$, ו־$\sup(A) = \aleph_\alpha$, נקבל:

- $|A'| \leq |A|$
- $\sup(A') = \aleph_\alpha$
- $A' \subseteq \mathrm{CARD}(\aleph_\alpha)$.

אז A' קבוצת מונים הקופינלית ב־$\aleph_\alpha$, ולכן סה"כ $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq |A'| \leq |A| = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$.
כלומר, ניתן היה להניח מלכתחילה כי A קבוצה של מונים מעוצמה $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ ומתקיים $\sup(A) = \aleph_\alpha$.
נניח את הנ"ל, ונסמן:

$$B := \{\beta < \alpha \mid \aleph_\beta \in A\}.$$

אז $\bigcup\{\aleph_\beta \mid \beta \in B\} = \bigcup A = \aleph_\alpha$.
נובע כי B קופינלית ב־$(\alpha, \in)$, שכן, אחרת, $\delta := \sup(B) < \alpha$ ואז $\bigcup\{\aleph_\beta \mid \beta \in B\} \leq \aleph_\delta < \aleph_\alpha$. ■

תכונה 5: ל־$\aleph$ יש נקודת שבת.
יתר על כן, לכל סודר α קיים סודר $\delta > \alpha$ כך ש־$\delta = \aleph_\delta$.

הוכחה: בהנתן סודר α כלשהו, נגדיר ברקורסיה על $n < \omega$ סדרת מונים באופן הבא:

$$\begin{aligned} \delta_0 &:= \aleph_{\alpha+1} \\ \delta_{n+1} &:= \aleph_{\delta_n} \end{aligned}$$

לבסוף, יהי $\delta := \sup_{n<\omega} \delta_n$. אז לכל $n < \omega$ מתקיים:

$$\aleph_{\delta_n} = \delta_{n+1} \leq \delta$$

לכן:

$$\aleph_\delta = \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \delta\} = \sup\{\aleph_{\delta_n} \mid n < \omega\} \leq \delta$$

השיוויון השני במשוואה הנ"ל נובע מכך ש־$\aleph$ שומרת סדר ורציפה.
כיוון ש־$\aleph$ שומרת סדר, מקבלים מטענה מהרצאה 2 כי $\delta \leq \aleph_\delta$. סה"כ $\aleph_\delta = \delta$, כמבוקש. ■

תרגיל 9.3 הראו כי לכל מונה סדיר אינסופי κ ולכל סודר α, קיים סודר $\delta > \alpha$ כך ש־$\aleph_\delta = \delta$, וכן $\mathrm{cf}(\aleph_\delta) = \kappa$.

רמז: משנים את הוכחת תכונה 5, ובונים ברקורסיה סדרה עולה ממש באורך κ (במקום סדרה בת־מניה).

הגדרה 9.4 בהנתן פונקציה f וקבוצה X, כותבים בדרך־כלל:

$$f[X] := \{f(x) \mid x \in X \cap \mathrm{dom}(f)\}$$

לעתים נעזרים בסימון נוסף: $f``X$.

תרגיל 9.5 1. לכל קבוצה X ופונקציה $f : A \to B$ מתקיים: $|f``X| \leq |X|$.[1]

2. אם f חח"ע ו־$X \subseteq A$, אז $|f``X| = |X|$.

הגדרה 9.6 עבור קבוצה A ומונה κ, מסמנים:

$$\begin{aligned} [A]^\kappa &:= \{X \subseteq A \mid |X| = \kappa\} \\ [A]^{<\kappa} &:= \{X \subseteq A \mid |X| < \kappa\}\,. \end{aligned}$$

תרגיל 9.7 אם A אינסופית, אז $\left|[A]^{<\omega}\right| = |A|$.[2]

טענה 9.8 אם λ מונה אינסופי, ו־ $\kappa \leq \lambda$ מונה כלשהו, אז $|[\lambda]^\kappa| = \lambda^\kappa$.

הוכחה: היות והמקרה $\kappa = 0$ טריוויאלי, נניח $\kappa \geq 1$.

לכל $X \in [\lambda]^\kappa$, כיוון ש־$|X| = \kappa$, האוסף הבא איננו ריק:

$$G_X := \{g \in {}^\kappa\lambda \mid g : \kappa \leftrightarrow X\}$$

תהי לכן $\varphi : [\lambda]^\kappa \to {}^\kappa\lambda$ פונקציה, כך ש־$\varphi(X) \in G_X$ לכל $X \in [\lambda]^\kappa$.

נשים לב כי אם X, Y איברים שונים מ־$[\lambda]^\kappa$, אז $\varphi(X) \neq \varphi(Y)$, שכן

$$\operatorname{Im}(\varphi(X)) = X \neq Y = \operatorname{Im}(\varphi(Y))\,.$$

כלומר φ חד־חד־ערכית, ו־$|[\lambda]^\kappa| \leq \lambda^\kappa$.

נראה כעת אי־שיוויון בכיוון ההפוך.

כיוון ש־$0 < \kappa \leq \lambda$ ו־λ אינסופי, נובע מטענה מהרצאה 8 כי $\lambda = \lambda \odot \kappa$. תהי לכן $h : \kappa \times \lambda \leftrightarrow \lambda$ פונקציית שקילות. נגדיר

$$\psi : {}^\kappa\lambda \to [\lambda]^\kappa$$

על־ידי הכלל:

$$\begin{aligned} \psi(f) &:= h``f \\ &= \{h(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in f\} \\ &= \{h(\alpha,\beta) \mid \alpha < \kappa, f(\alpha) = \beta\}\,. \end{aligned}$$

כיוון ש־h חח"ע ו־$f \subseteq \operatorname{dom}(h)$, מתקיים $|\psi(f)| = |h``f| = |f| = |\operatorname{dom}(f)| = \kappa$. לכן ψ מוגדרת היטב.

נראה כי ψ חח"ע:

נניח f, g איברים שונים מ־${}^\kappa\lambda$. אז קיים $\alpha < \kappa$ כך ש־$f(\alpha) \neq g(\alpha)$. אבל h חח"ע ולכן:

$$h(\alpha, f(\alpha)) \in \psi(f) \setminus \psi(g).$$

בפרט $\psi(f) \neq \psi(g)$. אזי ψ חח"ע, וסיימנו. ■

טענה 9.9 אם κ מונה אינסופי, אז $\kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)} > \kappa$.

הוכחה: אם κ סדיר, אז יש לנו כבר את משפט קנטור:

$$\kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa > \kappa.$$

[1] הטענה מניחה את אקסיומת הבחירה.
[2] היזכרו כי הוכחנו בהרצאה 8 כי $\kappa \odot \kappa = \kappa$ לכל מונה אינסופי κ.

נניח כעת כי κ חריג. מהטענה הקודמת, מתקיים:

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \left|[\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right|,$$

לכן מספיק להראות כי ב-$[\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ יש יותר מ- κ קבוצות.

תהי $\{A_i \mid i < \kappa\}$ רשימה כלשהי של κ קבוצות ב-$[\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. נראה כי קיימת $B \in [\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ כך ש-

$$\forall i < \kappa (B \neq A_i).$$

בפרט, $\{A_i \mid i < \kappa\} \neq [\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

יותר על כן, נצליח לקבל B המקיימת:

$$\forall i < \kappa (B \nsubseteq A_i),$$

וזה יראה כי $\{A_i \mid i < \kappa\}$ אפילו איננה קופינלית ב-$([\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}, \subseteq)$.

לעבודה! ראשית, נשים לב כי לכל $\alpha < \kappa$, הקבוצה

$$X_\alpha := \kappa \setminus \bigcup_{i<\alpha} A_i$$

איננה ריקה, וזו מהסיבה הפשוטה שמתקיים:

$$\left|\bigcup\{A_i \mid i < \alpha\}\right| \leq \left|\bigcup\{A_i \times \{i\} \mid i < \alpha\}\right| = \mathrm{cf}(\kappa) \odot |\alpha| \underset{\substack{\downarrow \\ \mathrm{cf}(\kappa)<\kappa \ \& \ \alpha<\kappa}}{<} \kappa.$$

תהי D קופינלית ב-$(\kappa, \in)$ מעוצמה $\mathrm{cf}(\kappa)$. נגדיר $f : D \to \kappa$ ע"י הכלל

$$f(\alpha) := \min(X_\alpha).$$

נסמן $B := \mathrm{Im}(f) \cup \mathrm{cf}(\kappa)$. אז

$$\mathrm{cf}(\kappa) \leq |B| \leq |D| \oplus \mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(\kappa).$$

כלומר, $B \in [\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

לבסוף, יהי $i < \kappa$ כלשהו. נראה כי $B \nsubseteq A_i$.

כיוון ש-D קופינלית ב-$(\kappa, \in)$, יהי $\alpha \in D$ גדול מספיק כך ש-$i < \alpha$.

אז $X_\alpha \cap A_i = \emptyset$, ומתקיים $f(\alpha) \in B \cap X_\alpha$, כלומר $f(\alpha) \in B \setminus A_i$, כנדרש. ■

מסקנה 9.10 $\left(\aleph_{\aleph_{18+\omega}}\right)^{\aleph_0} > \aleph_{\aleph_{18+\omega}}$.

הוכחה: $\mathrm{cf}(\aleph_{\aleph_{18+\omega}}) = \mathrm{cf}(\aleph_{18+\omega}) = \omega$. ■

תרגיל 9.11 אם κ מונה חריג, אז $\mathrm{cf}([\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}, \subset) > \kappa$.

רמז: חזרו להוכחת טענה 9.9, וראו כי זה בדיוק מה שהוכחנו: לכל κ קבוצות ב-$[\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ יש קבוצה B שלא מוכלת באף אחת מהן.

כעת נוכיח חיזוק של משפט קנטור למקרה של מונים אינסופיים:

משפט 9.12 (J. König, 1905)

לכל מונה λ אינסופי, מתקיים $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$.

הוכחה: נסמן $\kappa = 2^\lambda$. אם בשלילה $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$, אז

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^\lambda)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\lambda \odot \mathrm{cf}(\kappa)} \underset{\substack{\downarrow \\ \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda}}{=} 2^\lambda = \kappa$$

בסתירה לכך ש-$\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. ■

מסקנה 9.13 $2^{\aleph_0} \neq \aleph_{\aleph_{18+\omega}}$.

הוכחה: $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \omega = \mathrm{cf}\left(\aleph_{\aleph_{18+\omega}}\right)$. ■

הערה 9.14 $\mathrm{cf}(\mathbb{R}, <) = \aleph_0$ (עבור הסדר הרגיל של הממשיים), אך $\mathrm{cf}(|\mathbb{R}|, \in) > \aleph_0$.

נספח - תוספת על חשבון מונים

הגדרה 9.15 נניח $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ סדרת מונים (בהחלט ייתכן I אינסופית).

נגדיר סכום מוכלל של מונים:

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \biguplus_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} \right| .$$

שימו לב כי ההגדרה מתלכדת עם ההגדרה של סכום שני מונים, על-ידי $I = 2$.

הגדרה 9.16 נניח $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ סדרת מונים.

נגדיר כפל מוכלל של מונים:

$$\prod_{i \in I} \lambda_i = \left| \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} \lambda_i \mid \forall i \in I [f(i) \in \lambda_i] \right\} \right| .$$

גם כאן, ההגדרה מתלכדת עם ההגדרת של כפל של שני מונים.

משפט 9.17 (J. König, 1905)

אם $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$, $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ סדרות של מונים, ו- $\kappa_i < \lambda_i$ לכל $i \in I$, אז

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i .$$

הוכחה: ראשית נראה $\leq$, ואז נראה $\neq$.

לכל $(\alpha, j) \in \biguplus_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})$, נתאים פונקציה $f_{(\alpha,j)} : I \to \bigcup_{i \in I} \lambda_i$ ע"י הכלל:

$$f_{(\alpha,j)}(i) := \begin{cases} \alpha, & i = j \\ \kappa_i, & i \neq j \end{cases} .$$

היות ו-$\alpha < \kappa_j < \lambda_j$ ו-$\kappa_i < \lambda_i$ לכל $i \in I$, מתקיים סה"כ כי $f(i) \in \lambda_i$ לכל $i \in I$.

נראה כי המיפוי $f_{(\alpha,j)} \mapsto (\alpha, j)$ חח"ע. נניח $(\alpha, j) \neq (\alpha', j')$, ונפריד לשני מקרים:

אם $j = j'$, אז

$$f_{(\alpha,j)}(j) = \alpha \neq \alpha' = f_{(\alpha',j')}(j) .$$

אם $j \neq j'$, אז

$$f_{(\alpha,j)}(j) = \alpha < \kappa_j = f_{(\alpha',j')}(j) .$$

אז ביססנו $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$. כעת נראה $\sum_{i \in I} \kappa_i \neq \prod_{i \in I} \lambda_i$.

נניח בשלילה כי נתונה פונקציה על:

$$.\psi:\biguplus_{i\in I}(\kappa_i\times\{i\})\to\left\{f:I\to\bigcup_{i\in I}\lambda_i\mid\forall i[f(i)\in\lambda_i]\right\}$$

לכל $i\in I$, נסמן

$$.A_i:=\{f(i)\mid f\in\psi\left[\kappa_i\times\{i\}\right]\}$$

מתקיים:

$$|A_i|\le|\psi\left[\kappa_i\times\{i\}\right]|\le\kappa_i<\lambda_i$$

כלומר $\lambda_i\setminus A_i\neq\emptyset$, ולכן ניתן להגדיר

$$f:I\to\bigcup_{i\in I}\lambda_i$$

ע"י הכלל

$$.f(i):=\min\left(\lambda_i\backslash A_i\right)$$

כעת, מההנחה כי ψ על, קיים $(\alpha,j)\in\bigcup_{i\in I}(\kappa_i\times\{i\})$ כך ש־$\psi\left(\alpha,j\right)=f$.

בפרט, $f\in\psi\left[\kappa_j\times\{j\}\right]$, ואז $f(j)\in A_j$, בסתירה להגדרת f. ■

כעת משפט קנטור מתקבל כמסקנה מיידית מהעובדה ש־$1<2$:

מסקנה 9.18 $\kappa<2^\kappa$ לכל מונה κ.

הוכחה: $.\kappa=\sum_{i\in\kappa}1<\prod_{i\in\kappa}2=2^\kappa$ ■

טענה 9.19 נניח λ מונה אינסופי ו־$\langle\kappa_i\mid i\in\lambda\rangle$ סדרה של מונים ≥1.

אז עבור $\kappa:=\sup\left\{\kappa_i\mid i\in\lambda\right\}$, מתקיים $\sum_{i\in\lambda}\kappa_i=\max\left\{\kappa,\lambda\right\}$.

הוכחה: מתקיים $\lambda=\sum_{i\in\lambda}1\le\sum_{i\in\lambda}\kappa_i\le\sum_{i\in\lambda}\kappa=\lambda\odot\kappa$.

לכן, נותר להראות כי $\kappa\le\sum_{i\in\lambda}\kappa_i$. לשם כך, נגדיר העתקה $f:\kappa\to\bigcup_{i\in\lambda}(\kappa_i\times\{i\})$ באופן הבא.

היות ו־$\kappa=\sup\left\{\kappa_i\mid i\in\lambda\right\}$, לכל $\alpha\in\kappa$, קיים $i\in\lambda$ ראשון כך ש־$\alpha\in\kappa_i$, ואז נגדיר $f(\alpha):=(\alpha,i)$.

ברור כי f חח"ע, וסיימנו. ■

משפט 9.20 (האוסדורף, 1904)

אם κ,λ מונים אינסופיים, אז $(\kappa^+)^\lambda=\max\{\kappa^\lambda,\kappa^+\}$.

הוכחה: ברור כי $(\kappa^+)^\lambda\ge\kappa^\lambda$ וכי $(\kappa^+)^\lambda\ge\kappa^+$.

לכן, יש להתמקד באי־שיוויון: $(\kappa^+)^\lambda\le\max\{\kappa^\lambda,\kappa^+\}$.

אם $\kappa^+\le\lambda$ הרי שמטענה מהרצאה 8, $(\kappa^+)^\lambda=2^\lambda=\kappa^\lambda$ וכמובן $\kappa^+\le\lambda<2^\lambda$. סה"כ, במקרה זה,

$$.(\kappa^+)^\lambda=2^\lambda=\max\{\kappa^\lambda,\kappa^+\}$$

נניח לכן $\lambda\le\kappa$.

לכל $\alpha<\kappa^+$, מתקיים $|\alpha|\le\kappa$, ולכן ניתן לקבוע פונקציה $g_\alpha:\kappa\to\alpha$ על.

נסמן

$$.\mathcal{S}:=\left\{g_\alpha``y\mid y\in[\kappa]^\lambda,\,\alpha<\kappa^+\right\}$$

אז

$$.|\mathcal{S}|\le|[\kappa]^\lambda|\odot\kappa^+=\max\{\kappa^\lambda,\kappa^+\}$$

לכן מספיק להראות כי $\mathcal{S} = [\kappa^+]^\lambda$.

תהי $X \in [\kappa^+]^\lambda$ קבוצה כלשהי.

היות ו־$|X| = \lambda < \kappa^+ = \mathrm{cf}(\kappa^+)$, מתקיים $\sup(X) < \kappa^+$.

כלומר ניתן לקבוע $\alpha < \kappa^+$ כך ש־$X \subseteq \alpha$.

כיוון ש־g_α על, מתבקש להגדיר

$$Z = \{\delta \in \kappa \mid g_\alpha(\delta) \in X\}$$

היות ו־$|X| = \lambda$, קיימת $Y \in [Z]^\lambda$ כך ש־$g_\alpha \restriction Y$ חח"ע ועל X.

סה"כ $Y \in [\kappa]^\lambda$ ו־$X = g_\alpha``Y \in \mathcal{S}$, כנדרש. ■