בהרצאה 7 פגשנו את השערת הרצף המוכללת GCH: $2^\kappa = \kappa^+$ לכל מונה אינסופי κ.

טענה 10.1 נניח GCH. אז לכל מונים אינסופיים κ, λ מתקיים:

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \kappa \le \lambda \\ \kappa^+, & \mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda \le \kappa \\ \kappa, & \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}.$$

הוכחה: נחלק למקרים בהתאם לנ"ל:

1. אם $\kappa \le \lambda$, אז מטענה מהרצאה 8:
$$\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+.$$

2. אם $\mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda \le \kappa$, אז ממשפט קניג (הרצאה 9) מתקיים $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, ולכן:
$$\kappa^+ \le \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le \kappa^\lambda \le \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+.$$

3. אם $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, אז כל $x \in [\kappa]^\lambda$ איננו קופינלי ב-$(\kappa, \in)$.
מכאן, כי לכל $x \in [\kappa]^\lambda$, קיים $\alpha \in \kappa$ גדול מספיק כך ש-$x \subseteq \alpha$. לכן:
$$[\kappa]^\lambda = \bigcup_{\lambda<\alpha<\kappa} [\alpha]^\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda<\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha),$$
מהנחת GCH, לכל $\alpha < \kappa$ מתקיים
$$|\mathcal{P}(\alpha)| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^+ \le \kappa,$$
ולכן סה"כ
$$\kappa \le \kappa^\lambda = |[\kappa]^\lambda| \le |\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)| \le \kappa \odot \kappa = \kappa.$$

■

תרגיל 10.2 נניח GCH. אז לכל מונים אינסופיים λ, κ מתקיים:
אם $2^\lambda = 2^\kappa$ אז $\lambda = \kappa$.

הגדרה 10.3 מונה κ נקרא גבולי חזק אם לכל מונה $\lambda < \kappa$ מתקיים: $2^\lambda < \kappa$.

לדוגמה, ω הוא גבולי חזק.

טענה 10.4 כל מונה גבולי חזק הוא אכן מונה גבולי.

הוכחה: אם κ גבולי חזק אז ברור כי הוא אינסופי.
אם קיים $\lambda < \kappa$ כך ש-$\kappa = \lambda^+$, אז $2^\lambda \ge \lambda^+ = \kappa$, בסתירה לכך ש-$\kappa$ גבולי חזק.
לכן אין λ כזה. כלומר κ איננו מונה עוקב. ■

טענה 10.5 אם κ גבולי חזק אז לכל מונים $\mu, \lambda < \kappa$ מתקיים: $\mu^\lambda < \kappa$.

הוכחה: המקרה $\kappa = \aleph_0$ קל, לכן נניח $\kappa > \aleph_0$.
אז מתקיים: $\mu^\lambda \le \max\{\mu, \lambda, \aleph_0\}^{\max\{\mu,\lambda,\aleph_0\}} = 2^{\max\{\mu,\lambda,\aleph_0\}} < \kappa$. ■

פונקציית ה־$\beth$:

הגדרה 10.6 פונקציית ה־$\beth$ מוגדרת בצורה הבאה:

- $\beth_0 := \omega$.
- $\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}$.
- ל־α גבולי גדול מ־0: $\beth_\alpha := \bigcup\{\beth_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

קל לראות כי $\beth$ פונקציה שומרת סדר במובן החזק, רציפה, ולכן יש לה נקודות שבת מכל קופינליות.

טענה 10.7 אם α סודר גבולי, אז $\beth_\alpha$ גבולי חזק.

הוכחה: המקרה $\alpha = 0$ הוא טריוויאלי, לכן נניח α סודר גבולי גדול מ־0.
בהנתן מונה $\lambda < \beth_\alpha$, כיוון ש־$\beth_\alpha = \sup_{\beta<\alpha}\beth_\beta$, קיים סודר $\beta < \alpha$ כך ש־ $\lambda \leq \beth_\beta$. לכן

$$2^\lambda \leq 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} < \beth_\alpha.$$

■

תרגיל 10.8 הראו כי הבאים שקולים:

1. GCH.
2. $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$ לכל סודר α.
3. $\beth$ על ICN.

מסקנה 10.9 GCH גורר כי כל מונה גבולי הוא גבולי חזק.

אידיאלים

הגדרה 10.10 קבוצה $A \subseteq [0,1]$ היא ממידה אפס (Null set) אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרת קטעים פתוחים $\langle I_n \mid n < \omega\rangle$ כך ש:

- $\sum_{n<\omega}\operatorname{diam}(I_n) < \varepsilon$, ו־
- $A \subseteq \bigcup I_n$.

נתבונן באוסף הבא כדוגמה למושג שנציג מיד:

$$I := \{A \subseteq [0,1] \mid A \text{ is a null set}\}.$$

הגדרה 10.11 נאמר כי I אידיאל מעל קבוצה Z אמ"מ הבאים מתקיימים:

1. $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$.
2. $\emptyset \in I$.
3. סגירות ביחס לאיחודים: אם $A, B \in I$, אז $A \cup B \in I$.
4. סגירות ביחס להכלה כלפי מטה: אם $A \in I$ ו־$B \subseteq A$, אז $B \in I$.

תרגיל 10.12 הראו: אם I אידיאל, אז I סגור ביחס לאיחודים סופיים.

טענה 10.13 לקבוצה לא ריקה Z ואוסף קבוצות $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ הבאים שקולים:

1. I אידיאל מעל Z.
2. I אידיאל בחוג עם יחידה $(R,+,\cdot,0,1) = (\mathcal{P}(Z),\Delta,\cap,\emptyset,Z)$.

הוכחה: $(1) \Leftarrow (2)$: צריך לבדוק כי I תת־חבורה של $(R,+,0)$ המקיימת בליעה ביחס לפעולת הכפל $\cdot$.

נניח $A,B \in I$. צריך לבדוק כי $A-B \in I$. קל לראות כי בחוג זה מתקיים $-B = B$, ולכן יש לוודא כי $A\Delta B \in I$. כיוון ש־I סגור ביחס לאיחודים נקבל $A\cup B \in I$. כיוון ש־I סגור ביחס להכלה כלפי מטה נסיק כי $A\Delta B \in I$.

נניח $A \in I$ ו־$B \in R$ כלשהו. צריך לבדוק כי $B\cdot A$ ו־$A \cdot B$ שייכים ל־I. כיוון ש־$A\cap B = B \cap A$ היא תת־קבוצה של A, המבוקש נובע מהעובדה ש־I סגור ביחס להכלה כלפי מטה.

$(2) \Leftarrow (1)$: ראשית נראה כי I סגורה ביחס להכלה כלפי מטה. נניח $A \in I$ ו־$B \subseteq A$. אז מבליעה נובע כי $B = B\cdot A \in I$. כעת נראה סגירות ביחס לאיחודים. נניח $A,B \in I$. כיוון ש־I סגורה ביחס להכלה כלפי מטה נקבל כי גם $A\cap B \in I$. כיוון ש־I תת־חבורה של $(R,+,0)$ נסיק כי $A+B+(A\cap B)$ שייך ל־I, כלומר כי $A\cup B = (A\Delta B)\Delta(A\cap B)$ שייכת ל־I, כמבוקש. ∎

הגדרה 10.14 אידיאל I נקרא סיגמא־אדיטיבי אמ"מ I סגור ביחס לאיחודים בני־מניה.

למשל, האידיאל של הקבוצות ממידה אפס שפגשנו קודם הוא סיגמא־אדיטיבי.

כעת נבקש לפתח תורת מידה על ω_1 במקום על $[0,1]$.

הגדרה 10.15 פונקציה $f:\omega_1\to\omega_1$ נקראת נורמלית אם שני הבאים מתקיימים:

- f עולה (במובן החזק). כלומר $\alpha<\beta<\omega_1 \implies f(\alpha)<f(\beta)$.
- f רציפה. כלומר, אם α גבולי גדול מ־0, אז $f(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha} f(\beta)$. כלומר $f(\alpha) = \bigcup(f[\alpha])$.

שימו לב כי כל פונקציה נורמלית f נקבעת ביחידות ע"י $f \restriction \{0,\alpha+1 \mid \alpha<\omega_1\}$.

תרגיל 10.16 הראו כי לכל סודר $\beta < \omega_1$ מתקיים כי $f:\omega_1\to\omega_1$ המקיימת כלל $f(\alpha)=\beta+\alpha$ היא נורמלית.

טענה 10.17 לכל פונקציה נורמלית יש נקודת שבת.

יתר על כן, קבוצת נקודות השבת של פונקציה נורמלית היא קופינלית ב־ω_1.

הוכחה: נניח $f:\omega_1\to\omega_1$ פונקציה נורמלית. נניח $\alpha<\omega_1$ סודר כלשהו. נמצא נקודת שבת מעליו.

נגדיר ברקורסיה סדרה בת מניה עולה ממש: $\alpha_0 := \alpha+1$ ו־$\alpha_{n+1} := f(\alpha_n+1)$ לכל $n<\omega$.

לכל $n<\omega$, מתקיים:

$$\alpha_n < \alpha_n+1 \leq f(\alpha_n+1) = \alpha_{n+1}.$$

לכן $\alpha^* := \sup_{n<\omega}\alpha_n$ הוא סודר גבולי (הגדול מ־α) ומרציפות f נובע כי הוא נקודת שבת של f.

שימו לב כי העובדה כי הגבול α^* אכן שייך ל־ω_1 נובעת מכך ש־$\omega<\omega_1=\mathrm{cf}(\omega_1)$. ∎

סימון 10.18 לפונקציה נורמלית $f:\omega_1\to\omega_1$, נסמן $\mathrm{NS}_f := \{\alpha<\omega_1 \mid f(\alpha)\neq\alpha\}$.[1]

שימו לב כי היות ו־f שומרת סדר, נובע כי $f(\alpha)\neq\alpha$ אמ"מ $f(\alpha)>\alpha$.

הגדרה 10.19 נסמן ב־NS את אוסף כל התת־קבוצות $A\subseteq\omega_1$ כך שקיימת פונקציה נורמלית $f:\omega_1\to\omega_1$ כך שכל $\alpha\in A$ איננה נקודת שבת של f. היינו:

$$\mathrm{NS} := \{A\subseteq\omega_1 \mid \exists f:\omega_1 \overset{normal}{\longrightarrow} \omega_1 (A\subseteq \mathrm{NS}_f)\}.$$

[1] לא שבת=NS=Non Stationary.

טענה 10.20 NS אידיאל נאות מעל ω_1.

הוכחה: ברור כי $\emptyset \in \mathrm{NS}$.

לכל סודר $\gamma < \omega_1$, נובע מתרגיל 10.16 כי $\{\gamma\} \in \mathrm{NS}$ (נקח $\beta := \gamma + 1$ שם).

בנוסף, מהטענה הקודמת $\omega_1 \notin \mathrm{NS}$. לכן סה"כ

$$\{\emptyset\} \subsetneq \mathrm{NS} \subsetneq \mathcal{P}(\omega_1).$$

אם f פונקציה נורמלית ו־A קבוצה שאין בה נקודות שבת של f, אז הדבר נכון גם לכל תת־קבוצה של A, ומכאן כי NS סגורה ביחס להכלה כלפי מטה.

נותר להראות כי NS סגורה ביחס לאיחודים. ננמק זאת בקצרה היות ובקרוב נוכיח תכונה חזקה יותר. נניח $A_0, A_1 \in \mathrm{NS}$ ותהיינה f_0, f_1 פונקציות נורמליות המעידות על כך. נגדיר $f : \omega_1 \to \omega_1$ ע"י הכלל:

$$f(\alpha) := \max\{f_0(\alpha), f_1(\alpha)\}.$$

אז f נורמלית, ולכל $i < 2$ ו־$\alpha \in A_i$ מתקיים $\alpha < f_i(\alpha) \leq f(\alpha)$. לכן $A_0 \cup A_1 \in \mathrm{NS}$. ■

הגדרה 10.21 לקבוצת סודרים A נסמן ב־π_A את העתקת האיזומורפיזם מ־$(\mathrm{otp}(A, \in), \in)$ ל־$(A, \in)$:

$$\pi_A : \mathrm{otp}(A, \in) \leftrightarrow A.$$

הגדרה 10.22 תת־קבוצה A של ω_1 תקרא לא חסומה אמ"מ $\sup(A) = \omega_1$.

בהרצאה 8 הוכחנו כי כל מונה עוקב הוא סדיר. לכן $A \subseteq \omega_1$ לא חסומה אמ"מ $\mathrm{otp}(A, \in) = \omega_1$.

הגדרה 10.23 תת־קבוצה $A \subseteq \omega_1$ נקראת סגורה אמ"מ לכל $\beta < \omega_1$ מתקיים $A \cap \beta = \emptyset$ או $\sup(A \cap \beta) \in A$.

שימו לב כי אם ב־$A \cap \beta$ יש איבר אחרון, אז $\sup(A \cap \beta) \in A$ באופן טריוואלי. כלומר, התנאי הוא מעניין רק כאשר ב־$A \cap \beta$ אין איבר אחרון.

טענה 10.24 לתת־קבוצה $A \subseteq \omega_1$ הבאים שקולים:

1. A סל"ח (סגורה ולא חסומה).
2. π_A נורמלית.

הוכחה: $(1 \Leftarrow 2)$ נניח A סל"ח. אז $\mathrm{otp}(A, \in) = \omega_1$ ולכן π_A פונקציה עולה מ־ω_1 על A. נראה כי π_A רציפה. נניח $0 < \alpha < \omega_1$ סודר גבולי. אז $\pi_A \restriction \alpha$ פונקציה עולה (במובן החזק) מ־α על רישא של A.

יהי $\beta < \omega_1$ כך ש־$\mathrm{Im}(\pi_A \restriction \alpha) = A \cap \beta$. אז $\pi_A \restriction \alpha$ פונקציה עולה מ־α ל־$A \cap \beta$, ולכן $\sup(A \cap \beta) \notin A \cap \beta$. מאידך, A סגורה, ולכן $\sup(A \cap \beta) \in A$. אז סה"כ $\sup(A \cap \beta) = \pi_A(\alpha)$. קיבלנו כי $\sup(\pi_A[\alpha]) = \pi_A(\alpha)$, כמבוקש.

$(2 \Leftarrow 1)$ נניח $\beta < \omega_1$ כלשהו המקיים $A \cap \beta \neq \emptyset$.

אם ב־$A \cap \beta$ יש איבר אחרון, אז בוודאי ש־$\sup(A \cap \beta) \in A \cap \beta \subseteq A$.

נניח כעת כי ב־$A \cap \beta$ אין איבר אחרון ונבקש להראות כי $\sup(A \cap \beta) \in A$.

יהי $\alpha := \mathrm{otp}(A \cap \beta)$. אז $\pi_A \restriction \alpha$ פונקציית שקילות מ־α ל־$A \cap \beta$. כיוון שב־$A \cap \beta$ אין איבר אחרון, נובע כי α גבולי. כיוון ש־π_A רציפה, מתקבל כי $\pi_A(\alpha) = \sup(\pi_A[\alpha]) = \sup(A \cap \beta)$ ובפרט $\sup(A \cap \beta) \in A$. ■

טענה 10.25 האידיאל NS הוא סיגמא־אדיטיבי.

הוכחה: נניח $\{A_n \mid n<\omega\}$ משפחה בת־מניה של קבוצות מ־NS. נבקש להראות כי $\bigcup_{n<\omega} A_n \in \mathrm{NS}$.

לכל $n<\omega$, תהי f_n פונקציה נורמלית המעידה כי $A_n \in \mathrm{NS}$. נגדיר $h:\omega_1 \to \omega_1$ ע"י הכלל:

$$h(\alpha) := \sup_{n<\omega} f_n(\alpha).$$

ההגדרה היא טובה כיוון ש־$\omega < \mathrm{cf}(\omega_1)$.

כעת, כיוון ש־f_n רציפה לכל $n<\omega$, נובע כי לכל α גבולי גדול מ־0:

$$h(\alpha) = \sup_{n<\omega} f_n(\alpha) = \sup_{n<\omega}\sup_{\beta<\alpha} f_n(\beta) = \sup_{\beta<\alpha}\sup_{n<\omega}(f_n(\beta)) = \sup_{\beta<\alpha}(h(\beta)),$$

כלומר h רציפה.

כיוון ש־f_0 פונקציה עולה, מתקיים $\alpha \le f_0(\alpha) \le h(\alpha)$ לכל $\alpha<\omega_1$, ולכן $H := \mathrm{Im}(h)$ לא חסומה ב־ω_1. נראה כי H סגורה.

נניח $\beta<\omega_1$ ומתקיים $H\cap\beta$ לא ריקה וללא איבר אחרון. נסמן $\delta := \sup(H\cap\beta)$. כיוון שב־$H\cap\delta$ אין איבר אחרון נובע כי δ נקודת הצטברות של H, כלומר $\sup(H\cap\delta)=\delta$. נבקש להראות כי $\delta\in H$.

כיוון ש־δ נקודת הצטברות של $\mathrm{Im}(h)$, לכל $\alpha<\delta$, נוכל לבחור α' כך ש־$\alpha < h(\alpha') < \delta$. סה"כ

$$\delta = \sup\{h(\alpha') \mid \alpha<\delta\}.$$

יהי $\gamma := \sup\{\alpha' \mid \alpha<\delta\}$. כיוון ש־$h$ פונקציה לא־יורדת, מתקיים $\delta = \sup(h[\gamma])$.

כיוון שב־$H\cap\delta = h[\gamma]$ אין איבר אחרון נובע כי γ גבולי, ולכן $h(\gamma)=\delta$ ובפרט $\delta\in H$, כמבוקש.

סה"כ התקבל כי H סל"ח, ולכן π_H נורמלית.

לכל $n<\omega$ ו־$\alpha\in A_n$ מתקיים:

$$\alpha < f_n(\alpha) \le h(\alpha) \le \pi_H(\alpha)$$

ולכן α אינה נקודת שבת של π_H. סה"כ, הפונקציה הנורמלית π_H מעידה כי $\bigcup_{n<\omega} A_n \in \mathrm{NS}$. ■

נספח - תוספת על משפט רמזי

הגדרה 10.26 אידיאל I מעל Z נקרא מקסימלי אמ"מ $I \neq \mathcal{P}(Z)$, ולא קיים אידיאל J כך ש־ $I \subsetneq J \subsetneq \mathcal{P}(Z)$.

הערה 10.27 כל אידיאל I מעל קבוצה Z מוכל באידיאל מקסימלי. (מוכיחים בקורס בתורת החוגים ע"י שימוש בעקרון המקסימום של האוסדורף/אקסיומת הבחירה/הלמה של צורן)

הגדרה 10.28 מסנן F מעל Z נקרא על־מסנן אממ $F \neq \mathcal{P}(Z)$, ולכל $X \in \mathcal{P}(Z)$ מתקיים: $X\in F$ או $Z\setminus X \in F$.

הערה 10.29 מסנן F הוא על־מסנן מעל קבוצה Z אמ"מ $\hat{F} = \{A\subseteq Z \mid Z\setminus A \in F\}$ אידיאל מקסימלי.

היות וכל אידיאל מוכל באידיאל מקסימלי, מתקבל כי כל מסנן מוכל בעל־מסנן.

טענה 10.30 נניח F על־מסנן מעל מונה אינסופי κ.

לכל $n<\omega$ ופונקציה $g:\kappa\to n$, קיים $X\in F$ כך ש־$g\restriction X$ קבועה.

הוכחה: תהי $g:\kappa\to n$ כנ"ל. לכל $i<n$, נסמן

$$A_i := \{\alpha\in\kappa \mid g(\alpha)=i\}$$

נניח בשלילה כי $A_i \notin F$ לכל $i<n$. אז $\kappa\setminus A_i \in F$ לכל $i<n$, ואז $\emptyset = \bigcap(\kappa\setminus A_i) \in F$.

היות ו־$\emptyset \in F$ ו־F סגור ביחס להכלה כלפי מעלה, נובע כי $F = \mathcal{P}(\kappa)$, בסתירה להגדרת על־מסנן. ■

סימון 10.31 הסימון $\lambda \to (\mu)^k_\theta$ פירושו:

לכל פונקציה $c : [\lambda]^\kappa \to \theta$ קיימת $H \in [\lambda]^\mu$ כך ש־ $c \restriction [H]^\kappa$ פונקציה קבועה.

H כנ"ל נקראת הומוגנית/מונוכרומטית עבור c.

משפט 10.32 משפט רמזי, 1929

$\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$, כלומר, לכל פונקציה $c : [\omega]^2 \to 2$ קיימת $H \subseteq \omega$ אינסופית כך ש־ $c \restriction [H]^2$ קבועה.

הוכחה: נניח נתונה פונקציה $c : [\omega]^2 \to 2$.

יהי F על־מסנן מעל ω המרחיב את המסנן

$$D = \{A \subseteq \omega \mid \omega \setminus A \text{ is finite}\}.$$

לכל $j < \omega$, נסמן

$$\begin{aligned} A^j_0 &:= \{n < \omega \mid j < n,\ c(j,n) = 0\} \\ A^j_1 &:= \{n < \omega \mid j < n,\ c(j,n) = 1\} \end{aligned}$$

אז $A^j_0 \uplus A^j_1 \in D \subseteq F$ ולכן קיים $i_j < 2$ כך ש־ $A^j_{i_j} \in F$. נסמן $Z_j := A^j_{i_j}$.

נגדיר

$$\begin{aligned} B_0 &:= \{j < \omega \mid i_j = 0\} \\ B_1 &:= \{j < \omega \mid i_j = 1\} \end{aligned}$$

אז $B_0 \uplus B_1 \in F$, ולכן קיים i^* כך ש־ $B_{i^*} \in F$.

נסמן $Z = B_{i^*}$.

כעת, נגדיר ברקורסיה סידרה עולה של מספרים טבעיים:

$$\begin{aligned} a_0 &:= \min(Z) \\ a_{n+1} &:= \min(Z \cap \bigcap_{m \le n} Z_{a_m}) \end{aligned}$$

אז

$$H := \{a_n \mid n < \omega\}$$

קבוצה אינסופית. נראה כי H הומוגנית. יתר על כן, נראה כי $c``[H]^2 = \{i^*\}$.

אכן. יהי $m < n < \omega$ כלשהו. מתקיים:

$$a_n \in Z_{a_m} = A^{a_m}_{i_{a_m}}$$

ולכן

$$c(a_m, a_n) = i_{a_m}$$

כיוון ש־ $a_m \in Z = B_{i^*}$ נובע $i_{a_m} = i^*$.

סה"כ $c(a_m, a_n) = i^*$ לכל $m < n < \omega$. ■

תרגיל 10.33 העזרו במשפט רמזי להראות כי כל סדרת ממשיים $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ מכילה תת־סדרה מונוטונית.

תרגיל 10.34 הראו כי אם $(P, <)$ קס"ח אינסופי, אז יש ב־$(P, <)$ שרשרת אינסופית או אנטי־שרשרת אינסופית.

נכליל את משפט רמזי למספר גדול יותר של צבעים.

טענה 10.35 $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה: המקרה $n=0,1$ טריוויאלי.

המקרה $n=2$, זהו משפט רמזי שהוכחנו.

נתקדם באינדוקציה: נניח $2 \le n < \omega$ עבורו מתקיים $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_n$ ונוכיח $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_{n+1}$.

בהנתן $c:[\omega]^2 \to n+1$, נגדיר $d:[\omega]^2 \to n$ על־ידי

$$d(x,y) := \begin{cases} c(x,y), & c(x,y) \neq n \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

תהי $H \subseteq \omega$ אינסופית, הומוגנית עבור d.

יהי i^* כך ש־ $d``[H]^2 = \{i^*\}$.

אם $i^* \neq 0$, אז $c``[H]^2 = \{i^*\}$ כלומר H הומוגנית עבור c, וסיימנו.

אם $i^*=0$, אז $c``[H]^2 \subseteq \{0,n\}$.

כלומר, מתקבלת פונקציה מהצורה $c \restriction [H]^2 : [H]^2 \to \{0,n\}$.

ואז מכך שמתקיים $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$, קיימת $H' \subseteq H$ אינסופית כך ש־ $c \restriction [H']^2$ קבועה, כמבוקש. ∎

הערה 10.36 הנ"ל נכון גם לכל d טבעי ו־ n טבעי, כלומר $\aleph_0 \to (\aleph_0)^d_n$.

טענה 10.37 $\aleph_0 \nrightarrow (\aleph_0)^{\aleph_0}_2$.

הוכחה: נבקש להגדיר צביעה $c:[\omega]^{\aleph_0} \to 2$ שלא תהיה לה קבוצה הומוגנית אינסופית.

יהי F על־מסנן המרחיב את $D=\{A\subseteq\omega \mid \omega\setminus A \text{ is finite}\}$.

בהנתן $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ (תת־קבוצה אינסופית של מספרים טבעיים), תהי $a_0,a_1,a_2,\ldots$ מניה עולה של A.

נתבונן בקבוצה:

$$I_A := [a_0,a_1) \uplus [a_2,a_3) \uplus [a_4,a_5) \uplus \ldots$$

כאשר $[b,c)=\{n\in\omega \mid b\le n<c\}$, ונגדיר:

$$c(A) := \begin{cases} 1, & I_A \in F \\ 0, & I_A \notin F \end{cases}$$

נראה כי אין ל־c קבוצה הומוגנית אינסופית.

בהינתן $H \subseteq \omega$ אינסופית, נגדיר $H' := H \setminus \{\min(H)\}$.

היות ומתקיים $H,H' \in [H]^{\aleph_0}$, מספיק להראות כי $c(H)\neq c(H')$.

תהי $a_0,a_1,a_2,\ldots$ מניה עולה של H. מתקיים:

$$\begin{aligned} I_H &= [a_0,a_1) \uplus [a_2,a_3) \uplus [a_4,a_5) \uplus \ldots \\ I_{H'} &= [a_1,a_2) \uplus [a_3,a_4) \uplus [a_5,a_6) \uplus \ldots \end{aligned}$$

ולכן $\omega = I_{H'} \uplus I_H \uplus [0,a_0)$.

כיוון ש־ F מרחיב את המסנן D, הקבוצה הסופית $[0,a_0)$ איננה ב־F.

לכן $I_{H'} \notin F \iff I_H \in F$, ובפרט $c(H)\neq c(H')$. ∎

טענה 10.38 (משפט רמזי הסופי)

לכל k,n טבעיים קיים r טבעי גדול מספיק כך ש־ $r \to (k)^2_n$.

הוכחה: נניח כי k,n דוגמא נגדית.

פירושו של דבר, כי לכל r טבעי קיימת צביעה $c_r:[r]^2\to n$ ללא קבוצה הומוגנית מגודל k.

יהי F על־מסנן המרחיב את $D=\{A\subseteq\omega\mid\omega\setminus A\text{ is finite}\}$. אז כל קבוצה ב־$F$ היא אינסופית.

נגדיר $c:[\omega]^2\to n$ ע"י הכלל:

$$c\left(i_0,i_1\right)=j\iff\left\{r\in\omega\mid c_r\left(i_0,i_1\right)=j\right\}\in F.$$

שימו לב כי c מוגדרת היטב, משום שלכל $\left(i_0,i_1\right)$, אנו מחלקים את ω ל־n קבוצות זרות בזוגות:

$$\biguplus_{j<n}\left\{r\in\omega\mid c_r\left(i_0,i_1\right)=j\right\}$$

ואז לפחות אחת מהן תהיה בעל־מסנן F.

לא ייתכנו שתי קבוצות זרות בעל־מסנן F, כי $\emptyset\notin F$, ולכן בדיוק קבוצה אחת מהנ"ל תהיה במסנן, כנדרש.

כעת, ממשפט רמזי האינסופי $\aleph_0\to\left(\aleph_0\right)^2_n$, נקבע קבוצה אינסופית $H\subseteq\omega$ וצבע $j<n$ כך ש־$c``[H]^2=\{j\}$.

תהי A תת־קבוצה של הקבוצה האינסופית H בת בדיוק k איברים.

לכל $\{i_0,i_1\}\in[A]^2$, כך ש־$i_0<i_1$, נסמן $Z_{(i_0,i_1)}=\left\{r\in\omega\mid c_r\left(i_0,i_1\right)=j\right\}$.

כיוון ש־$\{i_0,i_1\}\in[H]^2$ מתקיים $c(i_0,i_1)=j$ ולכן מהגדרת c נובע כי $Z_{(i_0,i_1)}$ שייכת ל־F.

כיוון ש־F סגור ביחס לחיתוך מספר סופי של קבוצות, נובע כי $\bigcap\left\{Z_{(i_0,i_1)}\mid[A]^2\ni\{i_0,i_1\},i_0<i_1\right\}$ שייכת ל־F ובפרט אינסופית.

יהי r איבר בחיתוך הנ"ל והגדול מ־$\max(A)$, אז $c_r``[A]^2=j$ בסתירה לכך ש־$|A|=k$ ובחירת c_r. ■