תזכורת 11.1
- פונקציה $f:\omega_1\to\omega_1$ נקראת נורמלית אם היא עולה (במובן החזק) ורציפה.
- לקבוצת סודרים A, סימנו ב־π_A את העתקת האיזומורפיזם מ־$(\mathrm{otp}(A,\in),\in)$ ל־$(A,\in)$:

$$\pi_A:\mathrm{otp}(A,\in)\leftrightarrow A.$$

- ראינו כי $A\subseteq\omega_1$ היא סגורה ולא חסומה (סל"ח) ב־ω_1 אמ"מ π_A נורמלית.
- אנו מסמנים ב־NS את אוסף כל התת־קבוצות $A\subseteq\omega_1$ כך שקיימת פונקציה נורמלית $f:\omega_1\to\omega_1$ כך שכל $\alpha\in A$ איננה נקודת שבת של f.
- ראינו כי NS אידיאל נאות סיגמא אדיטיבי מעל ω_1. ראינו כי NS מכיל את $\{\gamma\}$ לכל $\gamma<\omega_1$, ואז מסיגמא אדיטיביות נובע כי $[\omega_1]^{\leq\aleph_0}\subseteq\mathrm{NS}$.

טענה 11.2 תת־קבוצה $A\subseteq\omega_1$ היא סגורה אמ"מ לכל $\delta<\omega_1$ גדול מ־0 מתקיים

$$\sup(A\cap\delta)=\delta\implies\delta\in A.$$

הוכחה: נניח $A\subseteq\omega_1$ קבוצה המקיימת את התנאי הנ"ל. נבקש להראות כי היא סגורה.

נניח $\beta<\omega_1$ ו־$A\cap\beta\neq\emptyset$. יש להראות כי $\sup(A\cap\beta)\in A$.

אם ב־$A\cap\beta$ יש איבר אחרון, אז $\sup(A\cap\beta)\in A\cap\beta\subseteq A$.

כעת נניח כי ב־$A\cap\beta$ אין איבר אחרון. נסמן $\delta:=\sup(A\cap\beta)$. אז מתקיים $\delta=\sup(A\cap\delta)$ ואז מההנחה נקבל כי $\sup(A\cap\beta)=\sup(A\cap\delta)=\delta\in A$, כמבוקש. ■

תרגיל 11.3 אם $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\omega_1)$ משפחה של קבוצות סגורות, אז $\bigcap\mathcal{A}$ קבוצה סגורה.

טענה 11.4 נניח $f:\omega_1\to\omega_1$ פונקציה נורמלית. אז קבוצת נקודות השבת של f היא סל"ח ב־ω_1.

הוכחה: בשיעור הקודם הראנו כי קבוצת נקודות השבת של f — נסמנה ב־A — לא חסומה ב־ω_1. כעת נוודא כי A סגורה. נניח $\delta<\omega_1$ סודר כלשהו גדול מ־0 עבורו $\sup(A\cap\delta)=\delta$. נבקש להראות כי $\delta\in A$. לכל $\alpha\in A\cap\delta$ מתקיים $f(\alpha)=\alpha$. כיוון ש־f עולה ורציפה נקבל

$$f(\delta)=\sup_{\alpha<\delta}f(\alpha)=\sup_{\alpha\in A\cap\delta}f(\alpha)=\sup(A\cap\delta)=\delta.$$

■

הגדרה 11.5 נאמר כי F מסנן מעל קבוצה Z אמ"מ הבאים מתקיימים:

1. $F\subseteq\mathcal{P}(Z)$.
2. $Z\in F$.
3. סגירות ביחס לחיתוכים: אם $X,Y\in F$ אז $X\cap Y\in F$.
4. סגירות ביחס להכלה כלפי מעלה: אם $X\in F$ ו־$X\subseteq Y\subseteq Z$, אז $Y\in F$.

הגדרה 11.6 בהנתן אידיאל I מעל קבוצה Z, מסמנים:

- $\hat{I}:=\{Z\setminus X\mid X\in I\}$. נקרא המסנן הדואלי של I.
- $I^+:=\mathcal{P}(Z)\setminus I$. נקרא אוסף הקבוצות החיוביות ביחס ל־I.

שימו לב כי $\hat{I} \subseteq I^+$. בנוסף, I אידיאל מקסימלי אמ"מ $\hat{I} = I^+$.

טענה 11.7 אם I אידיאל מעל Z, אז לכל $S \in I^+$ ו-$C \in \hat{I}$ מתקיים $S \cap C \neq \emptyset$.

הוכחה: אם $S \cap C = \emptyset$, אז $C \subseteq Z \setminus S$, ומסגירות כלפי מעלה של המסנן $\hat{I}$ נובע כי $Z \setminus S \in \hat{I}$, ולכן $S \in I$ בסתירה להנחה כי S ב-I^+. ■

תרגיל 11.8 הראו כי אם I אידיאל מעל Z, $S \in I^+$ ו-$C \in \hat{I}$, אז $S \cap C \in I^+$.

הגדרה 11.9 נסמן ב-CUB את אוסף התת-קבוצות של ω_1 המכילות סל"ח.

טענה 11.10 CUB הוא המסנן הדואלי של NS.

הוכחה: $(\supseteq)$: נניח $A \in \mathrm{CUB}$. נבקש להראות כי $\omega_1 \setminus A \in \mathrm{NS}$.

יהי B סל"ח כלשהו המוכל ב-A. אז $\pi_B : \omega_1 \leftrightarrow B$ היא נורמלית. נסמן ב-C את קבוצת נקודות השבת של π_B. מהגדרת C, מתקיים כי $\omega_1 \setminus C \in \mathrm{NS}$. לכל $\alpha \in C$ מתקיים $\pi_B(\alpha) = \alpha \in B$.

אז $A \supseteq B \supseteq C$ ו-$(\omega_1 \setminus A) \subseteq (\omega_1 \setminus C)$. כיוון ש-$\mathrm{NS}$ סגור כלפי מטה נובע כי $\omega_1 \setminus A \in \mathrm{NS}$, כמבוקש.

$(\subseteq)$: נניח $A \in \mathrm{NS}$, ותהי f פונקציה נורמלית המעידה על כך. נסמן ב-C את קבוצת נקודות השבת של f. אז $C \cap A = \emptyset$. כלומר $\omega_1 \setminus A$ מכילה את הסל"ח C ולכן שייכת ל-CUB. ■

מסקנה 11.11 חיתוך בן-מניה של סל"חים ב-ω_1 הוא סל"ח ב-ω_1.

הוכחה: נניח $\langle C_n \mid n < \omega \rangle$ סל"חים ב-ω_1. מתרגיל 11.3, $C := \bigcap_{n<\omega} C_n$ סגורה. נראה כי היא לא חסומה ב-ω_1.

מטענה 11.10, $C_n \in \hat{\mathrm{NS}}$ לכל $n < \omega$. היות ו-NS סיגמא אדיטיבי, נובע כי $C \in \hat{\mathrm{NS}}$. אז C מכילה סל"ח ולכן לא חסומה בפני עצמה. סה"כ, C סל"ח. ■

דוגמה לקבוצה המכילה סל"ח שאיננה סל"ח: $\omega_1 \setminus \{\omega\}$.

תרגיל 11.12 הראו כי לכל פונקציה $f : \omega_1 \to \omega_1$, הקבוצה $\{\alpha < \omega_1 \mid f[\alpha] \subseteq \alpha\}$ היא סל"ח.

תרגיל 11.13 נניח כי A תת-קבוצה לא חסומה של ω_1. הראו כי $\{\alpha < \omega_1 \mid \sup(A \cap \alpha) = \alpha\}$ סל"ח.

הגדרה 11.14 תת-קבוצה $S \subseteq \omega_1$ נקראת שבת אמ"מ היא שייכת ל-NS^+. כלומר, אמ"מ לכל פונקציה נורמלית $f : \omega_1 \to \omega_1$ קיים $\alpha \in S$ כך ש-$f(\alpha) = \alpha$.

הערה 11.15 מטענות 11.7 ו-11.10 נובע כי $S \subseteq \omega_1$ שבת אמ"מ $S \cap C \neq \emptyset$ לכל סל"ח C ב-ω_1.

במתמטיקה בדידה מראים כי לקבוצות $\mathcal{A}, A, B$ מתקיים:

- $B \supseteq A$ אמ"מ $A \setminus B = \emptyset$.
- $A = B$ אמ"מ $A \Delta B = \emptyset$
- $\bigcup \mathcal{A}$ הוא האיבר הראשון (ביחס ל-$\subseteq$) באוסף $\{X \mid \forall A \in \mathcal{A}(A \subseteq X)\}$.

בהקשר של אידיאלים סיגמא אדיטיביים, קבוצות בנות מניה הן זניחות, ולכן נגדיר:

- $A \subseteq^* B$ אמ"מ $A \setminus B$ בת-מניה.
- $A =^* B$ אמ"מ $A \Delta B$ בת-מניה.
- $\bigcup^* \mathcal{A}$ הוא איבר מינימלי (ביחס ל-$\subseteq^*$) כלשהו ב-$\{X \mid \forall A \in \mathcal{A}(A \subseteq^* X)\}$.

תרגיל 11.16 $\bigcup^* \mathcal{A}$ נקבע ביחידות עד כדי קבוצה בת־מניה.[1]

הגדרה 11.17 נניח $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ קבוצה של תת־קבוצות של ω_1. האיחוד האלכסוני של הסדרה הוא:

$$\triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha := \{\beta < \omega_1 \mid \exists \alpha < \beta(\beta \in A_\alpha)\}.$$

שימו לב כי לכל $\delta < \omega_1$ מתקיים $(A_\delta \setminus \triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha) \subseteq \delta + 1$ ובפרט $A_\delta \subseteq^* \triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$.

הגדרה 11.18 אידיאל I מעל ω_1 נקרא נורמלי אמ"מ הוא סגור ביחס לאיחוד אלכסוני.

הגדרה 11.19 פונקציה $f : S \to \omega_1$ נקראת דוחסת אמ"מ $f(\alpha) < \alpha$ לכל $\alpha \in S \setminus \{0\}$.

משפט 11.20 (משפט שובך יונים) נניח I אידיאל נורמלי מעל ω_1 כך ש־$\{0\} \in I$.
לכל $S \in I^+$ ופונקציה דוחסת $f : S \to \omega_1$ קיימת תת־קבוצה $A \subseteq S$ השייכת ל־I^+ ועליה f קבועה.[2]

הוכחה: לכל $\alpha < \omega_1$, נסמן $A_\alpha := f^{-1}\{\alpha\}$.
אם קיים $\alpha < \omega_1$ כך ש־$A_\alpha \in I^+$, אז סיימנו. כעת נניח שלא קיים.
אז $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq I$ ולכן $A := \triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ שייכת ל־I. מטענה 11.7, $S \setminus (\{0\} \cup A)$ לא ריקה.
יהי β סודר מ־$S \setminus (\{0\} \cup A)$. נסמן $\alpha := f(\beta)$. ברור כי $\beta \in A_\alpha$.
כיוון ש־f דוחסת, נקבל $\alpha < \beta$ ולכן β שייך לאיחוד האלכסוני A בסתירה לבחירת β. ■

תרגיל 11.21 הראו כי $[\omega_1]^{\leq\aleph_0}$ אידיאל נורמלי, והסיקו כי כל פונקציה $f : \omega_1 \to \omega$ הנה קבועה על קבוצה לא בת־מניה.

טענה 11.22 האידיאל NS הוא נורמלי.

הוכחה: נניח $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ סדרה של קבוצות מ־NS. נבקש להראות כי $\triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha \in \mathrm{NS}$.
לכל $\alpha < \omega_1$, תהי f_α פונקציה נורמלית המעידה כי $A_\alpha \in \mathrm{NS}$. נגדיר $h : \omega_1 \to \omega_1$ ע"י הכלל:

$$h(\beta) := \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\beta),$$ [3]

ההגדרה היא טובה כיוון ש־$\beta < \mathrm{cf}(\omega_1)$.
כיוון ש־f_α רציפה לכל $\alpha < \omega_1$, נובע כי לכל β גבולי גדול מ־0:

$$h(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\beta) = \sup_{\alpha<\beta}\sup_{\gamma<\beta} f_\alpha(\gamma) = \sup_{\gamma<\beta}\sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\gamma) \geq \sup_{\gamma<\beta}\sup_{\alpha<\gamma} f_\alpha(\gamma) = \sup_{\gamma<\beta} h(\gamma),$$

בנוסף, לכל $\gamma^* < \beta$ ו־$\alpha^* < \beta$, עבור $\gamma' := \max\{\gamma^*, \alpha^* + 1\}$, מתקיים $\gamma' < \beta$ ו־

$$f_{\alpha^*}(\gamma^*) \leq f_{\alpha^*}(\gamma') \leq \sup_{\alpha<\gamma'} f_\alpha(\gamma').$$

לכן

$$\sup_{\gamma<\beta}\sup_{\alpha<\beta}(f_\alpha(\gamma)) \leq \sup_{\gamma<\beta}\sup_{\alpha<\gamma} f_\alpha(\gamma)$$

ומכאן כי h רציפה.

כיוון ש־f_0 פונקציה עולה, מתקיים $h(\alpha) \geq f_0(\alpha) \geq \alpha$ כאשר $0 < \alpha < \omega_1$, ולכן $H := \mathrm{Im}(h)$ לא חסומה ב־ω_1.
כיוון ש־h רציפה, נובע (בדומה לשיקול שפגשנו בשיעור שעבר) כי H סגורה. אז H סל"ח, ו־π_H נורמלית.
יהי $\beta \in \triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$. אז קיים $\alpha < \beta$ כך ש־$\beta \in A_\alpha$, ולכן:

$$\beta < f_\alpha(\beta) \leq h(\beta) \leq \pi_H(\beta).$$

מכאן כי β אינה נקודת שבת של π_H. סה"כ, הפונקציה הנורמלית π_H מעידה כי $\triangledown_{\alpha<\omega_1} A_\alpha \in \mathrm{NS}$. ■

[1] רמז: אם X, Y שייכים לאוסף $\{X \mid \forall A \in \mathcal{A}(A \subseteq^* X)\}$, אז גם $X \cap Y$ שייך לאותו אוסף.
[2] כלומר, $A \in I^+$ ו־$|f[A]| \leq 1$.
[3] כאשר הכוונה היא ש־$h(0) = 0$.

מסקנה 11.23 (ניומר 1951, ו־פודור, 1956) נניח S תת־קבוצת של ω_1, אז הבאים שקולים:

1. S שבת.
2. לכל פונקציה דוחסת $f : S \to \omega_1$ קיימת $T \subseteq S$ שבת כך ש־$f \restriction T$ קבועה.

הוכחה: $(1) \overset{Fodor}{\Longleftarrow} (2)$:

קבוצה היא שבת אמ"מ היא שייכת ל־NS^+. היות ו־NS אידיאל נורמלי המכיל את כל הסינגלטונים, המסקנה נובעת מטענה 11.20.

$(\neg 1) \overset{Neumer}{\Longleftarrow} (\neg 2)$:

נניח S לא שבת, ויהי C סל"ח הזר לה. נגדיר $f : S \to C \cup \{0\}$ ע"י הכלל

$$f(\alpha) := \sup(C \cap \alpha).$$

כיוון ש־C סל"ח ב־ω_1, f מוגדרת היטב.

יהי $\beta := \min(C) + 1$. אז, לכל $\alpha \in S \setminus \beta$ מתקיים $f(\alpha) \in C$ וכמובן $f(\alpha) \leq \alpha$. היות ו־$C \cap S = \emptyset$ נקבל כי $f(\alpha) \neq \alpha$ לכל $\alpha \in S \setminus \beta$. סה"כ f פונקציה דוחסת.

כעת, יהי $\gamma < \omega_1$ כלשהו. נסמן $\gamma' := \min(C \setminus (\gamma + 1))$. אז

$$f^{-1}\{\gamma\} \subseteq \{\alpha \mid \gamma \leq \alpha < \gamma'\}.$$

מכאן כי f איננה קבועה על קבוצות שאינן בנות מניה. ■

משפט 11.24 (Ulam, 1930) קיימת מטריצה של תת־קבוצות של ω_1, $\langle A_{\alpha,n} \mid \alpha < \omega_1, n < \omega\rangle$, המקיימת:

1. אם $\beta \neq \alpha$, אז $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$ לכל $n < \omega$.
2. לכל α, $\omega_1 \setminus \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n}$ היא בת־מניה.

הוכחה: כל סודר $\delta < \omega_1$ הוא בן־מניה, ולכן נקבע פונקציה $f_\delta : \omega \overset{onto}{\to} (\delta + 1)$ כשלהי.

לכל $\alpha < \omega_1$ ו־$n < \omega$, נגדיר:

$$A_{\alpha,n} := \{\delta < \omega_1 \mid f_\delta(n) = \alpha\}.$$

(1) אם $n < \omega$ ו־$\delta \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$, אז $f_\delta(n) = \alpha$ ו־$f_\delta(n) = \beta$ ולכן $\alpha = \beta$.

(2) לכל $\alpha < \omega_1$, מתקיים $\bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n} = \omega_1 \setminus \alpha$. ■

הגדרה 11.25 נניח $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ קבוצה של תת־קבוצות של ω_1. החיתוך האלכסוני של הסדרה הוא:

$$\triangle_{\alpha<\omega_1} A_\alpha := \{\beta < \omega_1 \mid \forall \alpha < \beta (\beta \in A_\alpha)\}.$$

תרגיל 11.26 הוכיחו כי אם $\langle C_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ סדרה של סל"חים ב־ω_1, אז גם $\triangle_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ סל"ח ב־ω_1.