בשיעור האחרון הוכחנו קיומה של מטריצת אולם, היא מטריצה של תת־קבוצות של ω_1, $\langle A_{\alpha,n} \mid \alpha < \omega_1, n < \omega \rangle$, המקיימת:

1. אם $\alpha \neq \beta$, אז לכל $n < \omega$: $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$.
2. לכל $\alpha < \omega_1$: $\omega_1 \setminus \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n}$ היא בת־מניה.

מסקנה 12.1 נניח I אידיאל סיגמא אדיטיבי מעל ω_1, המכיל את כל הסינגלטונים.

כל קבוצה I־חיובית ניתן לפרק ל־$\aleph_1$־קבוצות זרות בזוגות, כל אחת מהן, I־חיובית.

הוכחה: נניח $S \in I^+$. מספיק להראות כי קיימת סדרה של קבוצות I־חיוביות זרות בזוגות $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ כך ש־$\bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ מוכל ב־S, שכן את ההפרש $S \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ ניתן פשוט לזרוק לקבוצה הראשונה A_0.[1]

נניח בשלילה כי אין סדרה כנ"ל. תהי $\langle A_{\alpha,n} \mid \alpha < \omega_1, n < \omega \rangle$ מטריצת אולם. מהנחת השלילה נובע כי לכל $n < \omega$, הקבוצה $\{\alpha < \omega_1 \mid A_{\alpha,n} \cap S \in I^+\}$ היא בת־מניה. לכן $\{\alpha < \omega_1 \mid \exists n < \omega (A_{\alpha,n} \cap S \in I^+)\}$ היא בת־מניה ומוכלת בסודר גדול מספיק $\beta < \omega_1$.

מתכונה (2) של מטריצת אולם, $\omega_1 \setminus \bigcup_{n<\omega} A_{\beta,n}$ היא בת־מניה, ולכן היא שייכת לאידיאל הסיגמא אדיטיבי I, ואזי המשלים $\bigcup_{n<\omega} A_{\beta,n}$ שייך ל־$\hat{I}$.

כיוון ש־$S \in I^+$, נקבל מתרגיל מההרצאה הקודמת כי $S \cap \bigcup_{n<\omega} A_{\beta,n} \in I^+$.

מהבחירה של β מתקיים כי $A_{\alpha,n} \cap S \notin I^+$ לכל $n < \omega$. כלומר $A_{\alpha,n} \cap S \in I$ לכל $n < \omega$. אבל I סיגמא אדיטיבי, ולכן $\left(\bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n} \cap S\right) \in I$, בסתירה לכך ש־$S \cap \bigcup_{n<\omega} A_{\beta,n} \in I^+$. ■

במקרה הפרטי בו ניקח $I = \mathrm{NS}$, מתקבל:

מסקנה 12.2 כל קבוצת שבת $S \subseteq \omega_1$ ניתן לפרק ל־$\aleph_1$ קבוצות שבת זרות בזוגות.

בפרט NS איננו אידיאל מקסימלי.

מסקנה 12.3 קיימת פונקציה $f : \omega_1 \to \omega_1$ המקיימת $f[C] = \omega_1$ לכל $C \subseteq \omega_1$ כך ש־C מכילה סל"ח.

הוכחה: יהי $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ פירוק של ω_1 לקבוצות שבת זרות בזוגות.

לכל $\beta < \omega_1$ קיים ביחידות $\alpha < \omega_1$ כך ש־$\beta \in A_\alpha$. תהי לכן $f : \omega_1 \to \omega_1$ כך ש־$\alpha \in A_{f(\alpha)}$ לכל α.

כעת, אם C מכילה סל"ח, אז $C \in \hat{\mathrm{NS}}$, וכיוון שלכל $\alpha < \omega_1$ מתקיים $A_\alpha \in \mathrm{NS}^+$, נקבל סה"כ כי $C \cap A_\alpha \neq \emptyset$ ולכן $\alpha \in \mathrm{Im}(f)$. ■

Partition Calculus

הגדרה 12.4 נניח $\lambda, \mu, \kappa, \theta$ מונים. הסימון $\lambda \to (\mu)^\kappa_\theta$ פירושו:

לכל פונקציה $f : [\lambda]^\kappa \to \theta$ קיימת $H \in [\lambda]^\mu$ כך ש־$f \restriction [H]^\kappa$ פונקציה קבועה.

נתחיל מיחסי חלוקה למימד 1.

דוגמה 12.5 (עקרון שובך היונים של דיריכלה)

אם $m < n$ מספרים טבעיים, אז $n \to (2)^1_m$.

יתר על כן: $n \to \left(\lceil \frac{n}{m} \rceil\right)^1_m$.

משפט 12.6 (עקרון שובך היונים האינסופי)

אם κ מונה אינסופי ו־$\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, אז $\kappa \to (\kappa)^1_\lambda$.

כלומר, לכל פונקציה $f : \kappa \to \lambda$ קיימת $H \in [\kappa]^\kappa$ כך ש־f קבועה על H.

[1] I סגור ביחס להכלה כלפי מטה. לכן I^+ סגור ביחס להכלה כלפי מעלה.

הוכחה: נניח בשלילה $f:\kappa\to\lambda$ דוגמא נגדית.

פירושו של דבר כי לכל $i\in\lambda$, הקבוצה
$$A_i=\{\alpha\in\kappa \mid f(\alpha)=i\}$$
היא מעוצמה $<\kappa$.

נובע כי
$$D:=\{|A_i| \mid i<\lambda\}$$
תת־קבוצה של κ מעוצמה $\leq\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$, ובפרט איננה קופינלית.

יהי $\delta:=\bigcup D$. אז δ סודר כאיחוד של סודרים, ו־$\delta<\kappa$, כי אחרת D הייתה קופינלית.

לכל $i\in\lambda$, מתקיים $|A_i|\leq\delta$ ולכן
$$G_i:=\{g:A_i\to\delta \mid g \text{ חח"ע}\}$$
איננה ריקה.

מאקסיומת הבחירה, תהי $\varphi:\lambda\to\bigcup_{i\in\lambda}G_i$ פונקציה כך שלכל $i\in\lambda$, $\varphi(i)$ פונקציה חח"ע מ־A_i ל־δ.

נגדיר $h:\kappa\to\lambda\times\delta$ על־ידי הכלל:
$$h(\alpha):=(f(\alpha),\varphi(f(\alpha))(\alpha))$$
נשים לב כי אם $h(\alpha)=h(\beta)$, אז בפרט $f(\alpha)=f(\beta)$ ו־
$$\varphi\left(f(\beta)\right)(\alpha)\underset{f(\beta)=f(\alpha)}{\underset{\downarrow}{=}}\varphi\left(f(\alpha)\right)(\alpha)\underset{h(\alpha)=h(\beta)}{\underset{\downarrow}{=}}\varphi\left(f(\beta)\right)(\beta)$$

כיוון ש־$\varphi\left(f(\beta)\right)$ חד־חד־ערכית, נובע כי: $\alpha=\beta$.

סה"כ h חח"ע ומתקבלת סתירה:
$$\kappa=|\kappa|\leq|\lambda\times\delta|=\max\{|\lambda|,|\delta|\}<\kappa.$$

■

כעת נראה כי המשפט האחרון הוא מיטבי.

טענה 12.7 לכל מונה אינסופי κ מתקיים $\kappa\nrightarrow(\kappa)^1_{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

כלומר, קיימת פונקציה $f:\kappa\to\mathrm{cf}(\kappa)$ עבורה לא קיימת $H\in[\kappa]^\kappa$ כך ש־f קבועה על H.

הוכחה: תהי $D\subseteq\kappa$ קופינלית מעוצמה $\mathrm{cf}(\kappa)$. נגדיר $f:\kappa\to D$ על־ידי הכלל:
$$f(\alpha):=\min\{\beta\in D \mid \alpha\leq\beta\}.$$
נניח בשלילה $H\in[\kappa]^\kappa$ כך ש־f קבועה על H. למשל, מקבלת ערך β.

בפרט, לכל $\alpha\in H$ מתקיים $\alpha\leq\beta$.

כלומר, $A\subseteq\beta+1$, ואז $|A|\leq|\beta+1|<\kappa$, וזוהי סתירה. ■

כעת נדבר על מימד 2.

משפט 12.8 (רמזי, 1929)

$\aleph_0\to(\aleph_0)^2_2$, כלומר, לכל פונקציה $c:[\omega]^2\to2$ קיימת $H\subseteq\omega$ אינסופית כך ש־ $c\restriction[H]^2$ קבועה.

ניתן להוכיח ע"י שימוש באידיאלים מקסימליים. את הפרטים ניתן למצוא בנספח להרצאה 10.

משפט 12.9 (שרפינסקי, 1933) $\aleph_1\nrightarrow(\aleph_1)^2_2$.

יתר על כן $2^{\aleph_0}\nrightarrow(\aleph_1)^2_2$.

הוכחה: יהי $\lhd$ סידור טוב של הממשיים $\mathbb{R}$. יהי $<$ הסידור הרגיל של הממשיים.

נגדיר צביעה $c : [\mathbb{R}]^2 \to 2$ כדלקמן.

לכל שני ממשיים $r_0 < r_1$, נצבע:

$$c(\{r_0, r_1\}) := \begin{cases} 1, & r_0 \lhd r_1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

כעת נניח $H \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה כך ש-$c \restriction [H]^2$ קבועה עם ערך כלשהו i. נבקש להראות כי H בת-מניה.

נניח כי $i = 1$. הנימוק עבור $i = 0$ דומה מאד.

יהי $\delta := \mathrm{otp}(H, \lhd)$, ותהי $\pi : \delta \leftrightarrow H$ העתקת האיזומורפיזם מ-$(\alpha, \in)$ ל-$(H, \lhd)$.

כיוון ש-$c``[H]^2 = \{1\}$ נובע כי π איזומופרים מ-$(\alpha, \in)$ ל-$(H, <)$.

אז לכל $\alpha < \delta$ כך ש-α אינו איבר אחרון ב-δ נוכל לבחור מספר רציונלי q_α כך ש-$\pi(\alpha) < q_\alpha < \pi(\alpha+1)$.

שימו לב כי לכל $\alpha < \beta < \delta$ כך ש-β אינו איבר אחרון ב-δ מתקיים $\pi(\alpha) < q_\alpha < \pi(\alpha+1) \leq \pi(\beta) < q_\beta$, כלומר כי המיפוי $\alpha \mapsto q_\alpha$ היא העתקה חח"ע ל-$\mathbb{Q}$. לכן δ בן-מניה. ■

הגדרה 12.10 נניח $\mathcal{S}$ משפחה של קבוצות.

נאמר כי $\mathcal{S}$ מהווה מערכת-Δ עם גרעין r אמ"מ לכל $a, b \in \mathcal{S}$ שונים מתקיים $a \cap b = r$.

הגרסה המושלמת של מערכת-Δ היא משפחה של קבוצות זרות בזוגות ($r = \emptyset$). מערכת-Δ מהווה קירוב לכך, שכן $\{a \backslash r \mid a \in \mathcal{S}\}$ זרות בזוגות.

משפט 12.11 (משפט מערכת-Δ, Shanin, 1946)

נניח $\mathcal{S}$ משפחה של קבוצות סופיות. $\kappa = |\mathcal{S}|$ מונה סדיר ולא בן-מניה.

אז קיימת $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ כך ש-$|\mathcal{S}'| = \kappa$, ו-$\mathcal{S}'$ מהווה מערכת-Δ.

הוכחה: היות ו-κ סדיר $> \aleph_0$, מתקיים שובך יונים

$$\kappa \to (\kappa)^1_{\aleph_0}.$$

לכן קיים $n < \omega$ כך שהקבוצה $\mathcal{S}_n := \{x \in \mathcal{S} \mid |x| = n\}$ מעוצמה κ.

היות ואנו ממילא מבקשים למצוא **תת-קבוצה** של S שהיא מערכת-Δ, ניתן כבר להניח ש-$\mathcal{S}$ היא מהצורה $\mathcal{S}_n$ עבור n כלשהו. כלומר, ניתן להניח כי $\mathcal{S} \subseteq [\bigcup \mathcal{S}]^n$.

היות ו- $\mathcal{S}$ מכילה κ קבוצות שונות מגודל n, מתקיים $\kappa = |\bigcup \mathcal{S}|$. תהי $g : \bigcup S \leftrightarrow \kappa$ העתקה חח"ע ועל. אז $\mathcal{T} = \{g``x \mid x \in \mathcal{S}\} \subseteq [\kappa]^n$, ואם $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ מערכת-$\Delta$, אז גם $\left\{g^{-1}``y \mid y \in \mathcal{T}'\right\} \subseteq S$ מערכת-Δ.

מהאמור לעיל נובע כי מספיק להוכיח את הטענה הבאה. ■

טענה 12.12 נניח κ מונה סדיר אינסופי, $n < \omega$ חיובי, ו-$\mathcal{S} \subseteq [\kappa]^n$ משפחה מעוצמה κ.

אז קיימת $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ מעוצמה κ, המהווה מערכת-Δ.

הוכחה: טענה זאת היתה נובעת בקלות מיחס החלוקה $\kappa \to (\kappa)^2_{2^n \cdot 2^n}$ אילו היה מתקיים, אבל משפט שרפינסקי מאלץ אותנו לחשוב על הוכחה אחרת. נוכיח באינדוקציה:

<u>בסיס האינדוקציה:</u> אם $\mathcal{S} \subseteq [\kappa]^1$, אז $\mathcal{S}$ כבר מערכת-Δ, עם גרעין $r = \emptyset$.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח $n < \omega$ חיובי והטענה מתקיימת ל-n. נבקש להוכיח עבור $n + 1$.

בהנתן $\mathcal{S} \subseteq [\kappa]^{n+1}$ מעוצמה κ, נסמן לכל $\alpha < \kappa$,

$$\mathcal{S}(\alpha) := \{x \in S \mid \min(x) = \alpha\}.$$

מקרה א': קיים $\alpha<\kappa$, כך ש-$|\mathcal{S}(\alpha)|=\kappa$.

במקרה זה, נסמן
$$\mathcal{T}:=\{x\backslash\{\alpha\}\mid x\in\mathcal{S}(\alpha)\}$$
אז $\mathcal{T}\subseteq[\kappa]^n$ מעוצמה κ, ומהנחת האינדוקציה, קיימת $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$ מעוצמה κ, המהווה מערכת-Δ, עם גרעין r.

נסמן
$$\mathcal{S}':=\left\{x\cup\{\alpha\}\mid x\in T'\right\}$$
אז $\mathcal{S}'\subseteq\mathcal{S}$ מעוצמה κ, מהווה מערכת-Δ, עם גרעין $r\cup\{\alpha\}$.

מקרה ב': לא קיים $\alpha<\kappa$ כך ש-$|\mathcal{S}(\alpha)|=\kappa$.

נשים לב כי במקרה זה, לכל סודר $\beta<\kappa$, קיים $x\in\mathcal{S}$ כך ש-$\min(x)>\beta$.

אכן, אחרת, קיים β כך שלכל $x\in\mathcal{S}$ מתקיים $\min(x)\leq\beta$. אבל אז, ניתן להגדיר $f:\mathcal{S}\to\beta+1$ ע"י הכלל
$$f(x):=\min(x).$$
היות ו-$|\mathcal{S}|=\kappa=\mathrm{cf}(\kappa)>\beta+1$ נקבל מעקרון שובך היונים קיומה של קבוצה $H\subseteq\mathcal{S}$, מעוצמה κ, כך ש-$f\restriction H$ קבועה. יהי $\alpha\leq\beta$ כך ש-$f``H=\{\alpha\}$. אז $H\subseteq\mathcal{S}(\alpha)$, בסתירה להנחה כי $|\mathcal{S}(\alpha)|<\kappa$.

אם כן, במקרה זה, נוכל לפנות למשפט ההגדרה ברקורסיה, כדי לקבל סדרה $\langle x_i\mid i<\kappa\rangle$ כך שאם $j<i<\kappa$, אז $\max(x_j)<\min(x_i)$. נפרט: בשלב ה-i של הרקורסיה, כבר בנינו סדרה $\langle x_j\mid j<i\rangle$ של קבוצות מ-$\mathcal{S}$, ואנו מבקשים להגדיר את x_i. היות ו-$\sup\{\max(x_j)\mid j<i\}$ הוא חסם עליון על קבוצה של פחות מ-κ סודרים ב-κ, נובע מהעובדה ש-κ סדיר כי חסם זה קטן מ-κ. נסמנו β. אז מההבחנה ממקודם, ניתן למצוא קבוצה $x\in\mathcal{S}$ כך ש-$\min(x)>\beta$. בפרט $\max(x_j)<\min(x)$ לכל $j<i$, ומתאים להגדיר את x זה כ-x_i.

לבסוף, תהי $\mathcal{S}':=\{x_i\mid i<\kappa\}$. אז $\mathcal{S}'\subseteq\mathcal{S}$ מהווה מערכת-Δ, מעוצמה κ עם גרעין $r=\emptyset$.

■

נספח על סל"חים - המקרה הכללי

מעתה והלאה, κ יסמל מונה סדיר לא בן-מניה.

הגדרה 12.13 C הוא סל"ח ב-κ אמ"מ C תת-קבוצה לא חסומה ב-κ ולכל $\delta<\kappa$ גדול מ-0:
$$\sup(C\cap\delta)=\delta\Longrightarrow\delta\in C\,.$$

תרגיל 12.14 אם A תת-קבוצה לא חסומה של κ, אז $\{\sup(A\cap\delta)\mid\delta<\kappa\}$ סל"ח ב-κ.

תרגיל 12.15 אם A תת-קבוצה לא חסומה של κ, אז $\{\delta<\kappa\mid\sup(A\cap\delta)=\delta\}$ סל"ח ב-κ.

תרגיל 12.16 חיתוך של פחות מ-κ סל"חים ב-κ הוא סל"ח ב-κ.

תרגיל 12.17 אם $\langle C_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ סדרה של סל"חים ב-κ, אז החיתוך האלכסוני
$$\triangle_{\alpha<\kappa}C_\alpha:=\{\beta<\kappa\mid\forall\alpha<\beta(\beta\in C_\alpha)\}$$
סל"ח ב-κ.

הגדרה 12.18 תת-קבוצה $S\subseteq\kappa$ היא שבת ב-κ אמ"מ לכל סל"ח C ב-κ מתקיים $C\cap S\neq\emptyset$.

תרגיל 12.19 אם C סל"ח ב־κ ו־S שבת ב־κ, אז $S \cap C$ שבת ב־κ.

תרגיל 12.20 אם $\theta < \kappa$ מונה אינסופי סדיר, אז $\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \theta\}$ שבת ב־κ.

משפט 12.21 (Solovay, 1971) כל קבוצת שבת ב־κ ניתן לפרק ל־κ קבוצות שבת זרות בזוגות.

כעת מתקבל משפט אנטי־רמזי למימד אינסופי.

מסקנה 12.22 (Erdos-Hajnal, 1966) אם $\theta < \kappa$ מונה אינסופי סדיר, אז $\kappa \nrightarrow (\kappa)^\theta_\kappa$.

הוכחה: נניח $\theta < \kappa$ מונה אינסופי סדיר. אז $\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \theta\}$ קבוצת שבת וניתן לפרק אותה ל־κ קבוצות שבת זרות בזוגות, $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$. נגדיר צביעה $f : [\kappa]^\theta \to \kappa$ כדלקמן. יהי $x \in [\kappa]^\theta$ כלשהו.

אם $\mathrm{cf}(\sup(x)) = \theta$, אז קיים ביחידות $\alpha < \kappa$ כך ש־$\sup(x) \in S_\alpha$, ונצבע $f(x) := \alpha$ עבור α זה.

אחרת, יהי $f(x) := 0$.

כעת נניח $A \subseteq \kappa$ תת־קבוצה מעוצמה κ. נבקש להראות כי $f``[A]^\theta = \kappa$.

יהי $\alpha < \kappa$ כלשהו. כיוון ש־A לא חסומה ב־κ, $\{\delta < \kappa \mid \sup(A \cap \delta) = \delta\}$ סל"ח ב־κ. כיוון ש־S_α שבת, נובע סה"כ קיים $\delta \in S_\alpha$ כך ש־$\sup(A \cap \delta) = \delta$. כיוון שכל איבר ב־$S_\alpha$ הוא מקופינליות θ, נוכל למצוא $x \subseteq A \cap \delta$ מעוצמה θ כך ש־$\sup(x) = \delta$.

אז מצאנו $x \in [A]^\theta$ כך ש־$f(x) = \alpha$, כמבוקש. ■