היום נתאר את הגשמת מערכות המספרים ב־ZF. נעשה זאת בשלבים:

1. מגדירים $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<)$

$$(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<)=\left(\underset{lec.6}{\overset{\omega}{\downarrow}},\underset{lec.3}{\overset{+}{\downarrow}},\underset{lec.3}{\overset{\cdot}{\downarrow}},\emptyset,\{\emptyset\},\underset{lec.2}{\overset{\in}{\downarrow}}\right)$$

2. נבקש להגדיר $(\mathbb{Z},\color{red}{+},\color{red}{-},\color{red}{\cdot},\color{red}{\mathbf{0}},\color{red}{\mathbf{1}},\color{red}{<})$ בהסתמך על סעיף א'.

מגדירים יחס שקילות $\sim$ על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$(a,b)\sim(a',b')\iff a+b'=a'+b$$

ואז

$$\mathbb{Z}=\{[(a,b)]_\sim\mid(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$$

בפרט, $\mathbb{Z}$ בת־מניה.

$$[(a,b)]_\sim\color{red}{+}[(c,d)]_\sim=[(a+c,b+d)]_\sim$$

הפעולה מוגדרת היטב, כי אם $(a,b)\sim(a',b')$ ו־$(c,d)\sim(c',d')$, אז $a+b'=a'+b$, $c+d'=c'+d$, ולכן $a+b'+c+d'=a'+b+c'+d$.

שימו לב:

לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

- אם $a<b$, אז קיים ביחידות $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$(a,b)\sim(0,n)$.
- אם $b<a$, אז קיים ביחידות $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$(a,b)\sim(n,0)$.
- אם $a=b$, אז $(a,b)\sim(0,0)$.

נהוג לכתוב $-n$ במקום $[(0,n)]_\sim$.

כל $n\in\mathbb{N}$ מזוהים עם המחלקה $[(n,0)]_\sim$.

בפרט,

$\color{red}{\mathbf{0}}$ מוגדר להיות $[(0,0)]_\sim$,

$\color{red}{\mathbf{1}}$ מוגדר להיות $[(1,0)]_\sim$.

**נגדיר כפל:**

$$\begin{aligned}
[(n,0)]_\sim\color{red}{\cdot}[(m,0)]_\sim &= [(n\cdot m,0)]_\sim\\
[(0,n)]_\sim\color{red}{\cdot}[(0,m)]_\sim &= [(n\cdot m,0)]_\sim\\
[(n,0)]_\sim\color{red}{\cdot}[(0,m)]_\sim &= [(0,n\cdot m)]_\sim\\
[(0,n)]_\sim\color{red}{\cdot}[(m,0)]_\sim &= [(0,n\cdot m)]_\sim
\end{aligned}$$

**נגדי:**

$$\color{red}{-}[(a,b)]_\sim=[(b,a)]_\sim$$

**סדר:**

$$[(a,b)]_\sim\color{red}{<}[(a',b')]_\sim\iff a+b'<a'+b$$

בפרט, לכל $0\neq n\in\mathbb{N}$,

$$[(0,n)]_\sim\color{red}{<}[(0,0)]_\sim\color{red}{<}[(n,0)]_\sim$$

וכן $\color{red}{<}$ מרחיב את $<$, והוא קווי משום שהאחרון קווי.

3. נבקש להגדיר את $(\mathbb{Q},+,-,\cdot,0,1,<)$ בהסתמך על $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,\mathbf{0},\mathbf{1},<)$.
נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ על־ידי

$$(a,b)\sim(a',b')\iff a\cdot b'=a'\cdot b$$

ואז

$$\mathbb{Q}=\{[(a,b)]_\sim \mid (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$$

בפרט $\mathbb{Q}$ בת־מניה.
נזהה כל $z\in\mathbb{Z}$ עם $[(z,1)]_\sim$.
בפרט,

$$\begin{aligned}0&=[(0,1)]_\sim\\1&=[(1,1)]_\sim\end{aligned}$$

- **חיבור:**

$$[(a,b)]_\sim+[(c,d)]_\sim=[(a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d)]_\sim$$

$+$ מרחיב את $+$.

- **כפל:**

$$[(a,b)]_\sim\cdot[(c,d)]_\sim=[(a\cdot c,b\cdot d)]_\sim$$

$\cdot$ מרחיב את $\cdot$.

- **סדר:**

$$[(a,b)]_\sim<[(a',b')]_\sim\iff a\cdot b'<a'\cdot b$$

$<$ מרחיב את $<$, והוא קווי משום שהאחרון קווי.

⋆ הבחנה:
$(\mathbb{Q},<)$ סדר קווי, צפוף, ללא איבר ראשון ואחרון (המושגים הוגדרו בהרצאה הראשונה).

**הוכחה:** לכל $[(a,b)]_\sim\in\mathbb{Q}$, מתקיים

$$\min_<\{[(2a,b)]_\sim,[(a,2b)]_\sim\}<[(a,b)]_\sim<\max_<\{[(2a,b)]_\sim,[(a,2b)]_\sim\}$$

כלומר אין איבר ראשון ואין איבר אחרון.
נראה צפיפות:
בהנתן $[(a,b)]_\sim<[(a',b')]_\sim$, אז

$$[(a,b)]_\sim<[(ab'+a'b,2bb')]_\sim<[(a',b')]_\sim$$

■

4. נרצה להגדיר $(\mathbb{R},+,-,\cdot,0,1,<)$ בהסתמך על $(\mathbb{Q},+,-,\cdot,1,0,<)$.
תת־קבוצה $D$ של $\mathbb{Q}$ תקרא **חתך דדקינד שמאלי** אם שלושת הבאים מתקיימים:

(א) $D$ חסומה ב־ $(\mathbb{Q},<)$ (הוגדר בהרצאה 5).
(ב) $D$ סגורה כלפי מטה, כלומר אם $q\in D$ אז $q_\downarrow\subseteq D$.
(ג) אין ב־ $(D,<)$ איבר מקסימלי.

נגדיר:

$$\mathbb{R} = \{D \subseteq \mathbb{Q} \mid D \text{ left Dedekind cut}\}$$

נזהה כל $q \in \mathbb{Q}$ עם הרישא $q_{\downarrow}$ (אכן חתך).

לכן, נגדיר

$$\begin{aligned} 0 &= 0_{\downarrow} \\ 1 &= 1_{\downarrow} \end{aligned}$$

- **חיבור:**

$$D+E = \{p+q \mid p \in D, q \in E\}$$

- **נגדי:**

$$-D = \{p-q \mid p \in 0,\ q \in \mathbb{Q} \backslash D\}$$

- **כפל:**
  נחלק לארבעה מקרים:
  (א) אם $0 \subseteq D$, $0 \subseteq E$, נגדיר

$$D \cdot E = \{p \cdot q \mid p \in D \backslash 0,\ q \in E \backslash 0\} \cup 0$$

  (ב) אם $0 \nsubseteq D$, $0 \nsubseteq E$, נגדיר

$$D \cdot E = (-D) \cdot (-E)$$

  (ג) אם $0 \subseteq D$ ו־ $0 \nsubseteq E$ נגדיר

$$D \cdot E = -(D \cdot (-E))$$

  (ד) אם $0 \nsubseteq D$ ו־ $0 \subseteq E$ נגדיר

$$D \cdot E = -((-D) \cdot E)$$

- **סדר:**

$$D < E \iff D \subset E$$

**הגדרה 13.1** סדר קווי $(L, \lhd)$ נקרא שלם אמ"מ לכל תת־קבוצה לא ריקה $A \subseteq L$, אם $A$ חסומה ב־$(L, \lhd)$, אז ל־$A$ יש חסם עליון, כלומר, לקבוצה הבאה יש איבר ראשון:

$$\{b \in L \mid \forall a \in A \ \ (a \lhd b \vee a = b)\}$$

יסומן ב־ $\sup(A)$.

**הגדרה 13.2** סדר קווי $(L,\lhd)$ נקרא ספרבילי אמ"מ קיימת תת־קבוצה בת־מניה $S\subseteq L$ כך שלכל $x\lhd y$ ב־$L$ קיים $z\in S$ כך ש־$y\lhd z\lhd x$ או $z\in\{x,y\}$.

**הבחנה:** $(\mathbb{R},<)$ סדר קווי, שלם, צפוף, ספרבילי, ללא איבר ראשון ואחרון.

**הוכחה:** במקרה בו $(\mathbb{R},<)$ איננו סדר קווי, אז קיימים חתכים $D,E$ שונים כך ש־$\neg(D\subset E)$ ו־$\neg(E\subset D)$.

יהי, לכן, $p\in D\setminus E$ ו־$q\in E\setminus D$. היות ו־$(\mathbb{Q},<)$ סדור קווית, ניתן להניח בה"כ כי $q<p$. אך אז העובדה ש־$D$ חתך גוררת כי $q\in D$ בסתירה לבחירת האחרון.

הלאה. נניח $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה ב־ $(\mathbb{R},<)$.

נסמן, $D=\bigcup\mathcal{A}$.

קל לוודא כי $D$ חתך (למשל, אין בו איבר מקסימלי, כי אחרת היה מקסימלי באחד החתכים מ־ $\mathcal{A}$).

אז מכך ש־ $<$ הוא $\subset$, נובע כי $D=\sup(A)$.

אי קיום איבר ראשון ואחרון:

לכל $D\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$D+(-1)<D<D+1$$

נראה ספרביליות:

$(\mathbb{Q},<)$ מעידה כי $(\mathbb{R},<)$ ספרבילי, כי אם $D\subset E$ חתכים, אז ניקח $q\in E\backslash D$ ונקבל

$$D\subset q_{\downarrow}\subset E$$

היות ו־$(\mathbb{Q},<)$ סדר צפוף, נובע מהנ"ל כי $(\mathbb{R},<)$ סדר צפוף. ■

**משפט 13.3** אם $(L,\lhd)$ סדר קווי שלם צפוף ספרבילי ללא איבר ראשון ואחרון, אז $(L,\lhd)$ איזומורפי סדר ל־ $(\mathbb{R},<)$.

**הוכחה:** תהי $S\subseteq L$ כבהגדרת הספרביליות.

כיוון ש־ $(L,\lhd)$ צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון, אז $(S,\lhd)$ גם צפופה ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.

אז ממשפט קנטור (הרצאה 1), קיים איזומורפיזם סדר מ־ $(\mathbb{Q},<)$ ל־ $(S,\lhd)$

$$\pi:\mathbb{Q}\to S$$

נגדיר

$$\overline{\pi}:\mathbb{R}\to L$$

על־ידי

$$\overline{\pi}(D)=\sup(\{\pi(q)\mid q\in D\})$$

כיוון ש־ $\pi$ שומרת סדר, קבוצה חסומה עוברת לחסומה, ואז השלמות של $(S,\lhd)$ מובילה לכך ש־ $\overline{\pi}$ מוגדרת היטב ושומרת סדר.

$\overline{\pi}$ חד־חד־ערכית כי אם $D\subset E$, אז קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש־$D\subset q_{\downarrow}\subset E$, ואז:

$$\overline{\pi}(D)\lhd\pi(q)\lhd\overline{\pi}(E)$$

$\overline{\pi}$ על, כי בהינתן $x\in L$, נסמן

$$D=\{q\in\mathbb{Q}\mid\pi(q)\lhd x\}$$

אז $D$ חתך, כלומר שייך ל־ $\mathbb{R}$, ומתקיים $\overline{\pi}(D)=X$ כיוון ש־$S$ מעידה על הספרביליות של $(L,\lhd)$. ■

### העוצמה של $\mathbb{R}$

נבקש להראות כי $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. את המונה $|\mathbb{R}|$ בד"כ מסמנים באות $\mathfrak{c}$. יש גם מי שמסמן את $|\mathbb{R}|$ באות א.

מהגדרת $\mathbb{R}$ כאוסף חתכי דדקינד מתקיים $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$.

בכיוון ההפוך, נראה כי קיימת התאמה חד־חד־ערכית מ־ ${}^{\omega}2$ ל־ $\mathbb{R}$.

נגדיר ברקורסיה מספרים רציונליים:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \\ a_{n+1} &= a_n \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

באינדוקציה מראים כי $a_n < 1$ לכל $n$.

כעת, בהנתן פונקציה $b : \omega \to 2$ נגדיר ברקורסיה מספרים רציונליים:

$$\begin{aligned} b_0 &= \begin{cases} 0, & b(0) = 0 \\ a_0, & b(0) = 1 \end{cases} \\ b_{n+1} &= \begin{cases} b_n, & b(n+1) = 0 \\ b_n + a_{n+1} & b(n+1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

מראים באינדוקציה כי $b_n < 1$ לכל $n$.

לבסוף, נגדיר

$$r_b = \sup\{b_n \mid n < \omega\}$$

(ההגדרה טובה, משום ש־ $1$ מעיד כי $\{b_n \mid n < \omega\}$ חסומה ב־ $(\mathbb{R}, <)$).

נראה כי המיפוי $b \mapsto r_b$ חד־חד־ערכי ונסיק כי $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$.

בהינתן $b, b' \in {}^{\omega}2$ שונים, יהי $m$ הטבעי הראשון כך ש־ $b(m) \neq b'(m)$.

בלי הגבלת הכלליות $b(m) = 0,\ b'(m) = 1$.

אז לכל $m > k$, $b_k = b'_k$. עבור $k = m$, מתקיים:

$$b_m = b'_m - a_m$$

עבור $k > m$ מתקיים

$$\begin{aligned} b_k &\leq b_m + (a_{m+1} + \ldots + a_k) \\ &= b'_m - a_m + (a_{m+1} + \ldots + a_k) \\ &< b'_m - \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) \\ &= b'_m + \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}\left(-1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) \\ &= b'_m + \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}\left(-1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= b'_m + \left(\frac{1}{4}\right)^{m} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &\leq b'_m - \frac{1}{6} \\ &\leq b'_k - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

ולכן

$$r_{b'} - r_{b'} \geq \frac{1}{6} > 0.$$