בשיעור זה, נתאר את הגשמת מערכות המספרים ב־ZF. נעשה זאת בשלבים:

1. מגדירים $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<)$

$$(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<) := \left(\underset{lec.6}{\underset{\downarrow}{\omega}}\ ,\ \underset{lec.3}{\underset{\downarrow}{+}}\ ,\ \underset{lec.3}{\underset{\downarrow}{\cdot}}\ , \emptyset, \{\emptyset\}\ ,\ \underset{lec.2}{\underset{\downarrow}{\in}} \right)$$

ניתן להראות באינדוקציה כי $+$ ו־$\cdot$ הן פעולות חילופיות ואסוציאטיביות מעל ω.

2. נבקש להגדיר מבנה $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,0,1,<)$ בהסתמך על סעיף א'.
מגדירים יחס שקילות $\sim$ על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, כדלקמן:

$$(a,b)\sim(a',b') \iff a+b'=a'+b$$ [1]

ואז מגדירים:

$$\mathbb{Z} := {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}/_{\sim} = \{[(a,b)]_{\sim} \mid (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}.$$

בפרט, $\mathbb{Z}$ בת־מניה.

אנו חושבים על $\mathbb{N}$ כעל "תת־קבוצה" של $\mathbb{Z}$ במובן זה שאנו מזהים כל $n\in\mathbb{N}$ עם המחלקה $[(n,0)]_{\sim}$. בפרט, נגדיר:

$$1 := [(1,0)]_{\sim} \quad , \quad 0 := [(0,0)]_{\sim}.$$

◄ נגדיר פעולת **חיבור**:

$$[(a,b)]_{\sim} + [(c,d)]_{\sim} := [(a+c,b+d)]_{\sim}.$$

הפעולה מוגדרת היטב, כי אם $(a,b)\sim(a',b')$ ו־$(c,d)\sim(c',d')$, אז $a+b'=a'+b$, $c+d'=c'+d$, ולכן $a+b'+c+d'=a'+b+c'+d$.

שימו לב, כי לכל $a,b\in\mathbb{N}$, מתקיים:

- $a<b$ אמ"מ קיים (ביחידות) $n\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ כך ש־$(a,b)\sim(0,n)$;
- $b<a$ אמ"מ קיים (ביחידות) $n\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ כך ש־$(a,b)\sim(n,0)$;
- $a=b$ אמ"מ $(a,b)\sim(0,0)$.

◄ נגדיר פעולת **כפל**:

$$[(a,b)]_{\sim} \cdot [(c,d)]_{\sim} := [(a\cdot c+b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c)]_{\sim}$$

קל לוודא כי ההגדרה היא טובה.[2]

◄ **נגדי:**

$$-[(a,b)]_{\sim} := [(b,a)]_{\sim}$$

◄ **סדר:**

$$[(a,b)]_{\sim} < [(c,d)]_{\sim} \iff a+c<d+b.$$

קל לוודא כי ההגדרה היא טובה וכי לכל $n\in\mathbb{N}$ שונה מ־0:

$$[(0,n)]_{\sim} < [(0,0)]_{\sim} < [(n,0)]_{\sim}.$$

כמו־כן, $<$ מרחיב את $<$, והוא קווי משום שהאחרון קווי.

ניתן גם להראות כי המבנה שהתקבל הוא חוג סדור.

[1] הרעיון: מחלקת השקילות של (a,b) מייצגת את המספר $a-b$.

[2] הרעיון: אם $(a-b)=(a'-b')$ ו־$(c-d)=(c'-d')$ אז $(a-b)(c-d)=(a'-b')(c'-d')$.

3. נבקש להגדיר מבנה $(\mathbb{Q},+,-,\cdot,0,1,<)$ בהסתמך על $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,0,1,<)$.
נגדיר יחס שקילות $\approx$ על $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, כדלקמן:

$$(a,b)\approx(a',b') \iff a\cdot b'=a'\cdot b.$$

את מחלקת השקילות של (a,b) נסמן ב־$\frac{a}{b}$, ואז

$$\mathbb{Q}:=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})/_{\approx}=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in\mathbb{Z},\ b\in(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\right\}.$$

בפרט $\mathbb{Q}$ בת־מניה.

אנו חושבים על $\mathbb{Z}$ כעל "תת־קבוצה" של $\mathbb{Q}$ במובן זה שאנו מזהים כל $z\in\mathbb{Z}$ עם המחלקה $\frac{z}{1}$.[3]

בפרט, נגדיר:

$$1:=\frac{1}{1}\qquad,\qquad 0:=\frac{0}{1}.$$

◄ נגדיר פעולת **חיבור**:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}:=\frac{(a\cdot d)+(b\cdot c)}{b\cdot d}$$

ההגדרה היא טובה ו־ $+$ מרחיב את $+$.

◄ נגדיר פעולת **כפל**:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

ההגדרה היא טובה ו־$\cdot$ מרחיב את $\cdot$.

◄ **נגדי:**

$$-\frac{a}{b}:=\frac{-a}{b}$$

◄ **סדר:**

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\iff a\cdot d<c\cdot b.$$

ההגדרה היא טובה, $<$ מרחיב את $<$, והוא קווי משום שהאחרון קווי.

ניתן גם להראות כי המבנה שהתקבל הוא שדה סדור.

טענה 13.1 $(\mathbb{Q},<)$ מהווה סדר קווי, צפוף, ללא איבר ראשון ואחרון.[4]

הוכחה: אין איבר ראשון או אחרון, משום שלכל $\frac{a}{b}$, מתקיים

$$\frac{a}{b}+(-1)<\frac{a}{b}<\frac{a}{b}+1.$$

כמו־כן, **צפיפות** נובעת מהעובדה שלכל $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, מתקיים

$$\frac{a}{b}<\frac{(a\cdot d)+(c\cdot b)}{(b\cdot d)+(b\cdot d)}<\frac{c}{d}.$$

■

4. נרצה להגדיר מבנה $(\mathbb{R},+,-,\cdot,0,1,<)$ בהסתמך על $(\mathbb{Q},+,-,\cdot,0,1,<)$.
תת־קבוצה D של $\mathbb{Q}$ תקרא **חתך דדקינד שמאלי** אם שלושת הבאים מתקיימים:

(א) D חסומה ב־ $(\mathbb{Q},<)$.[5]
(ב) אין ב־ $(D,<)$ איבר אחרון.
(ג) D סגורה כלפי מטה, כלומר, אם $q\in D$ אז $q_\downarrow\subseteq D$.

נגדיר:

$$\mathbb{R}:=\{D\subseteq\mathbb{Q}\mid \text{חתך דדקינד שמאלי } D\}.$$

אנו חושבים על $\mathbb{Q}$ כעל "תת־קבוצה" של $\mathbb{R}$ במובן זה שאנו מזהים כל $q\in\mathbb{Q}$ עם הרישא הראשית $q_\downarrow$.[6] בפרט,

[3] לא קשה לוודא כי המיפוי $z\mapsto\frac{z}{1}$ הוא חח"ע.
[4] המושגים הוגדרו בהרצאה הראשונה.
[5] הוגדר בהרצאה 5. במקומות אחרים, יש שיעדיפו את המונח "חסומה מלעיל".
[6] זהו אכן חתך. כיוון ש־$(\mathbb{Q},<)$ סדר צפוף, מתקיים כי המיפוי $q\mapsto q_\downarrow$ הוא חח"ע.

נגדיר:

$$1 := 1_{\downarrow} \qquad , \qquad 0 := 0_{\downarrow}.$$

◄ נגדיר פעולת **חיבור**:

$$D + E := \{d + e \mid d \in D, e \in E\}.$$

$+$ מרחיב את $+$.

◄ **נגדי:**

$$-D := \{(-d) + e \mid d \in \mathbb{Q} \setminus D,\ e \in 0\}.$$

◄ **כפל:**

נחלק לארבעה מקרים:

(א) אם $0 \subseteq D$, $0 \subseteq E$, נגדיר

$$D \cdot E = \{p \cdot q \mid p \in D \setminus 0,\ q \in E \setminus 0\} \cup 0$$

(ב) אם $0 \nsubseteq D$, $0 \nsubseteq E$ נגדיר

$$D \cdot E = (-D) \cdot (-E)$$

(ג) אם $0 \subseteq D$ ו־$0 \nsubseteq E$ נגדיר

$$D \cdot E = -(D \cdot (-E))$$

(ד) אם $0 \nsubseteq D$ ו־$0 \subseteq E$ נגדיר

$$D \cdot E = -((-D) \cdot E)$$

$\cdot$ מרחיב את $\cdot$.

◄ **סדר:**

$$D < E \iff D \subset E.$$

$<$ מרחיב את $<$.

הגדרה 13.2 סדר קווי $(L, \lhd)$ נקרא שלם אמ"מ לכל תת־קבוצה לא ריקה $A \subseteq L$, אם A חסומה ב־$(L, \lhd)$, אז ל־A יש חסם עליון, כלומר, לקבוצה הבאה יש איבר ראשון:

$$\{b \in L \mid \forall a \in A\ (a \lhd b \vee a = b)\}.$$

איבר זה, אם קיים, הוא יחיד ויסומן ב־ $\sup(A)$.

הגדרה 13.3 סדר קווי $(L, \lhd)$ נקרא ספרבילי אמ"מ קיימת תת־קבוצה בת־מניה $S \subseteq L$ כך שלכל $y \lhd x$ ב־L, קיים $z \in S$ כך ש־$y \lhd z \lhd x$ או $z \in \{x, y\}$.

הבחנה 13.4 $(\mathbb{R}, <)$ סדר קווי, שלם, צפוף, ספרבילי, ללא איבר ראשון ואחרון.

הוכחה: במקרה בו $(\mathbb{R}, <)$ איננו סדר **קווי**, אז קיימים חתכים D, E שונים כך ש־$\neg(D \subset E)$ ו־$\neg(E \subset D)$.

יהי, לכן, $p \in D \setminus E$ ו־$q \in E \setminus D$. היות ו־$(\mathbb{Q}, <)$ סדורה קווית, ניתן להניח בה"כ כי $p < q$. אך אז העובדה ש־D חתך גוררת כי $q \in D$ בסתירה לבחירת האחרון.

שלמות: נניח $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה ב־ $(\mathbb{R}, <)$. נסמן, $D := \bigcup \mathcal{A}$.

קל לוודא כי D חתך (למשל, אין בו איבר אחרון, כי אחרת היה אחרון באחד החתכים מ־ $\mathcal{A}$).

אז מכך ש־ $<$ הוא $\subset$, נובע כי $D = \sup(A)$.

אי קיום איבר ראשון ואחרון: לכל $D \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$.D + (-1) < D < D + 1$$

$\mathbb{Q}$ מעידה כי $(\mathbb{R}, <)$ **ספרבילי**, שכן, אם $D \subset E$ חתכים, אז ניקח $q \in E \setminus D$ ונקבל

$$.D \subset q_{\downarrow} \subset E$$

היות ו־$(\mathbb{Q}, <)$ סדר צפוף, נובע מהנ"ל כי גם $(\mathbb{R}, <)$ סדר **צפוף**. ■

תרגיל 13.5 הראו כי $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ שדה סדור ארכימדי.

משפט 13.6 אם $(L, \lhd)$ סדר קווי שלם צפוף ספרבילי ללא איבר ראשון ואחרון, אז $(L, \lhd)$ איזומורפי סדר ל־ $(\mathbb{R}, <)$.

הוכחה: תהי $S \subseteq L$ כבהגדרת הספרביליות.

כיוון ש־ $(L, \lhd)$ צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון, אז $(S, \lhd)$ גם צפופה ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
אז ממשפט קנטור (הרצאה 1), קיים איזומורפיזם סדר מ־ $(\mathbb{Q}, <)$ ל־ $(S, \lhd)$

$$.\pi : \mathbb{Q} \to S$$

נגדיר

$$\overline{\pi} : \mathbb{R} \to L$$

על־ידי הכלל:

$$.\overline{\pi}(D) := \sup(\pi[D])$$

כיוון ש־ π שומרת סדר, תמונה איבר־איבר של קבוצה חסומה היא קבוצה חסומה, ואז השלמות של $(L, \lhd)$ מובילה לכך ש־ $\overline{\pi}$ מוגדרת היטב.

$\overline{\pi}$ שומרת סדר (ובפרט חד־חד־ערכית), כי אם $D \subset E$, אז קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש־$D \subset q_{\downarrow} \subset E$, ואז:

$$.\overline{\pi}\,(D) \lhd \pi\,(q) \lhd \overline{\pi}\,(E)$$

$\overline{\pi}$ על, כי בהנתן $x \in L$, נסמן

$$D := \{q \in \mathbb{Q} \mid \pi(q) \lhd x\}$$

אז D חתך, כלומר שייך ל־ $\mathbb{R}$, ומתקיים $\overline{\pi}(D) = X$ כיוון ש־S מעידה על הספרביליות של $(L, \lhd)$. ■

העוצמה של $\mathbb{R}$

נבקש להראות כי $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. את המונה $|\mathbb{R}|$ בד"כ מסמנים באות $\mathfrak{c}$. יש גם מי שמסמן את $|\mathbb{R}|$ באות $\aleph$.

מהגדרת $\mathbb{R}$ כאוסף חתכי דדקינד מתקיים $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$. נטפל בכיוון ההפוך:

טענה 13.7 קיימת התאמה חד־חד־ערכית מ־ $^{\omega}2$ ל־ $\mathbb{R}$.

הוכחה: נגדיר ברקורסיה מספרים רציונליים:

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{4} \\ a_{n+1} &:= a_n \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

באינדוקציה מראים כי $a_n < 1$ לכל n.

כעת, בהנתן פונקציה $b : \omega \to 2$ נגדיר ברקורסיה מספרים רציונליים:

$$\begin{aligned} b_0 &:= \begin{cases} 0, & b(0) = 0 \\ a_0, & b(0) = 1 \end{cases} \\ b_{n+1} &:= \begin{cases} b_n, & b(n+1) = 0 \\ b_n + a_{n+1}, & b(n+1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

מראים באינדוקציה כי $b_n < 1$ לכל n.

לבסוף, נגדיר

$$r_b := \sup\{b_n \mid n < \omega\}.$$

ההגדרה היא טובה, משום ש־ 1 מעיד כי $\{b_n \mid n < \omega\}$ חסומה ב־ $(\mathbb{R}, <)$.

נראה כי המיפוי $b \mapsto r_b$ חד־חד־ערכי ונסיק כי $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$.

בהנתן $b, b' \in {}^{\omega}2$ שונים, יהי m הטבעי הראשון כך ש־ $b(m) \neq b'(m)$.

בלי הגבלת הכלליות, נוכל להניח כי $b(m) = 0$ ו־$b'(m) = 1$.

- לכל $k < m$, מתקיים $b_k = b'_k$.
- עבור $k = m$, מתקיים

$$b_m = b'_m - a_m.$$

- עבור $k > m$ מתקיים

$$\begin{aligned}
b_k &\leq b_m + (a_{m+1} + ... + a_k) \\
&= b'_m - a_m + (a_{m+1} + ... + a_k) \\
&< b'_m - \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) \\
&= b'_m + \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} \left(-1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) \\
&= b'_m + \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= b'_m + \left(\frac{1}{4}\right)^{m} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&\leq b'_m - \frac{1}{6} \\
&\leq b'_k - \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

ולכן

$$r_{b'} - r_b \geq \frac{1}{6} > 0.$$

בפרט $r_{b'} \neq r_b$, כמבוקש. ■